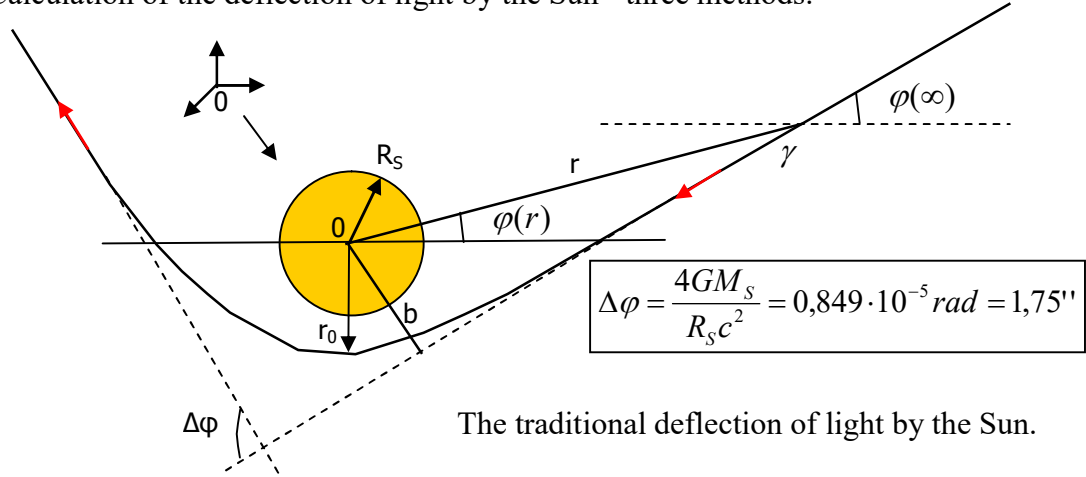


below

CALCULATION OF THE DEFLECTION OF LIGHT BY THE SUN - THREE METHODS:

Leonardo Rubino
August 2025

Abstract: Calculation of the deflection of light by the Sun - three methods.



1 – FIRST METHOD (BASED ON THE DIFFERENT SPEED OF LIGHT NEAR THE SUN):

Let's start from the Schwarzschild Solution (see Appendix 1):

$$d\tau^2 = B(r)c^2 dt^2 - A(r)dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2, \text{ where } A(r) = \left(1 + \frac{2GM}{c^2 r}\right) \text{ and } B(r) = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right).$$

Now, if we use it on a photon, we get: $0 = B(r)c^2 dt^2 - A(r)dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$; moreover, if we consider light radially travelling towards the Sun, we can get rid of the components in $d\theta$ and $d\varphi$: $0 = B(r)c^2 dt^2 - A(r)dr^2$; (1.1)

the speed of light is $c = dr/dt$ far from the mass of the Sun, while, close to it, the (1.1) holds, from which we get:

$$V = dr/dt = c(B(r)/A(r))^{1/2} \neq c; \quad (1.2)$$

so, being: $B(r) = [1 - \frac{2GM}{rc^2}]$ and $A(r) = [1 - \frac{2GM}{rc^2}]^{-1} \cong [1 + \frac{2GM}{rc^2}]$, then from the developments on

the variable $\frac{2GM}{rc^2}$ used on the (1.2), we easily have that:

$$V/c = ([1 - \frac{2GM}{rc^2}])^{1/2} / [1 + \frac{2GM}{rc^2}]^{1/2} \cong [1 - \frac{2GM}{2rc^2}][1 - \frac{2GM}{2rc^2}] \cong [1 - \frac{2GM}{rc^2}], \text{ that is:}$$

$$V \cong c[1 - \frac{2GM}{rc^2}]$$

(1.3)

This method is based on the variation of velocity the light undergoes when it approaches a mass (see the (1.3)).

2 – SECOND METHOD (BASED ON THE SNELL'S LAW):

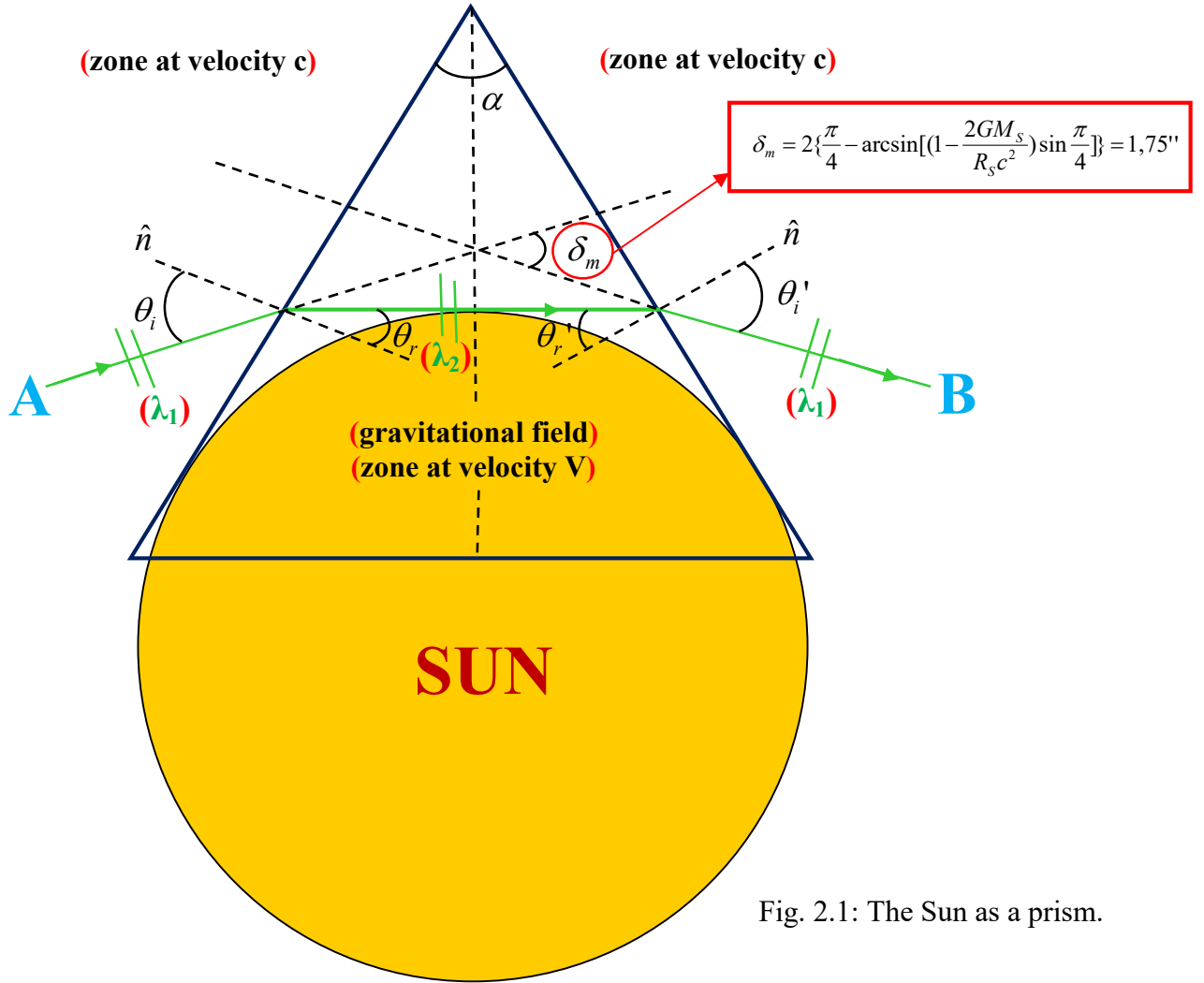


Fig. 2.1: The Sun as a prism.

Of course, in the above Fig. 2.1, the prism can be lowered, in order to have the horizontal stretch of the ray of light (λ_2) short enough. And such a prism can also be rotated around the centre of the star and repositioned, out of symmetry reasons.

As well as in the light refraction situation, a ray bends while entering the water (SNELL-Rif. Fig. A3.1 in Appendix 3), the same happens to the light entering the gravitational field of a star: a deflection. Moreover, as well as air and water have got different light velocities, also with the Sun we will talk about a far c and a close V .

The traditional computation method for the light deflection by the Sun yields the value:

$$\Delta\varphi = \frac{4GM_s}{R_s c^2} = 0,849 \cdot 10^{-5} \text{ rad} = 1,75'' , \quad (2.1)$$

such a value was obtained, as an example, in Brazil during the 1919 eclipse.

($R_s = 6,95475 \cdot 10^8 \text{ m}$, $M_s = 1,9891 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ and $c = 2,99792458 \times 10^8 \text{ m/s}$)

Now, we are going to use the change of the velocity of light when it approaches a mass.

With reference to the above Fig. 2.1, we remind (first of all) the (A3.6) in Appendix 3, which is rather intuitive anyway, although it is proved there:

$$\delta_m = 2(\theta_i - \theta_r) = \Delta\varphi \quad (2.2)$$

δ_m is (of course) the deflection angle the light ray undergoes when coming from **A**, then finally leaving the (refractive) prism system and so heading for **B** ; moreover, there we prove that $\delta = \delta_m$

is the lowest when θ_i makes the ray into the prism be parallel to the base and in such a case we also have that $\theta_i = \theta_i'$ and $\theta_r = \theta_r'$, and also have the (2.2) (that is the A3.6), indeed.

Then, we remind the definition of redshift:

$$z = \frac{\lambda_{observed} - \lambda_{emitted}}{\lambda_{emitted}} \quad (2.3)$$

Moreover, it follows that: $1 + z = \frac{\lambda_{observed}}{\lambda_{emitted}}$. $z > 0$ is redshift; $z < 0$ is blueshift. From the (2.3) we get:

$$z = \frac{\lambda_{observed} - \lambda_{emitted}}{\lambda_{emitted}} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1 = \frac{-\Delta\lambda}{\lambda_1} = \frac{V/f - c/f}{c/f} = \frac{-\Delta v}{c} = \frac{V}{c} - 1 \quad (2.4)$$

(of course, on the left of the prism, where λ_1 is in the [A](#) zone (source) and λ_2 is observed from the prism) and then, by comparing the last one (the (2.4), indeed) to the (1.3) (which comes out of the Schwarzschild Solution), that is the: $V \cong c[1 - \frac{2GM_S}{R_S c^2}]$ ($\rightarrow \frac{V}{c} \cong [1 - \frac{2GM_S}{R_S c^2}]$), then we get:

$$z = -\frac{2GM_S}{R_S c^2} = \frac{-\Delta\lambda}{\lambda_1} \quad (2.5)$$

So, for the Snell's Law (A3.3), we have: $\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_r} = \frac{c}{V} = n$, but from the (2.4) we also have that:

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1 = \frac{V}{c} - 1, \text{ so: } \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{V}{c} \rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{c}{V} \rightarrow \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_r} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \text{ and so:}$$

$$\sin \theta_r = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \sin \theta_i = \frac{(\lambda_1 - \Delta\lambda)}{\lambda_1} \sin \theta_i = (1 - \frac{\Delta\lambda}{\lambda_1}) \sin \theta_i \text{ and due to the (2.5), we have, then:}$$

$$\sin \theta_r = (1 - \frac{\Delta\lambda}{\lambda_1}) \sin \theta_i = (1 - \frac{2GM_S}{R_S c^2}) \sin \theta_i \text{ and finally:}$$

$$\theta_r = \arcsin[(1 - \frac{2GM_S}{R_S c^2}) \sin \theta_i] \quad (2.6)$$

and the (2.6) into the (2.2) yields:

$$\delta_m = 2\{\theta_i - \arcsin[(1 - \frac{2GM_S}{R_S c^2}) \sin \theta_i]\} \quad (2.7)$$

At last, by inspecting Fig. 2.2 below, we notice that the angle θ_i can span between 0° (so with the ray of light perfectly perpendicular to the left side of the prism) and 90° (so when, as a limit, the ray of light gets almost parallel to the left side of the prism), and so we will use, as θ_i , its mean value, that is: $\bar{\theta}_i = \frac{0^\circ + 90^\circ}{2} = 45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$, from which, thanks to the (2.7):

$$\delta_m = 2\{\frac{\pi}{4} - \arcsin[(1 - \frac{2GM_S}{R_S c^2}) \sin \frac{\pi}{4}]\} = 0,849 \cdot 10^{-5} \text{ rad} = 1,75'' \quad !!! \quad (2.8)$$

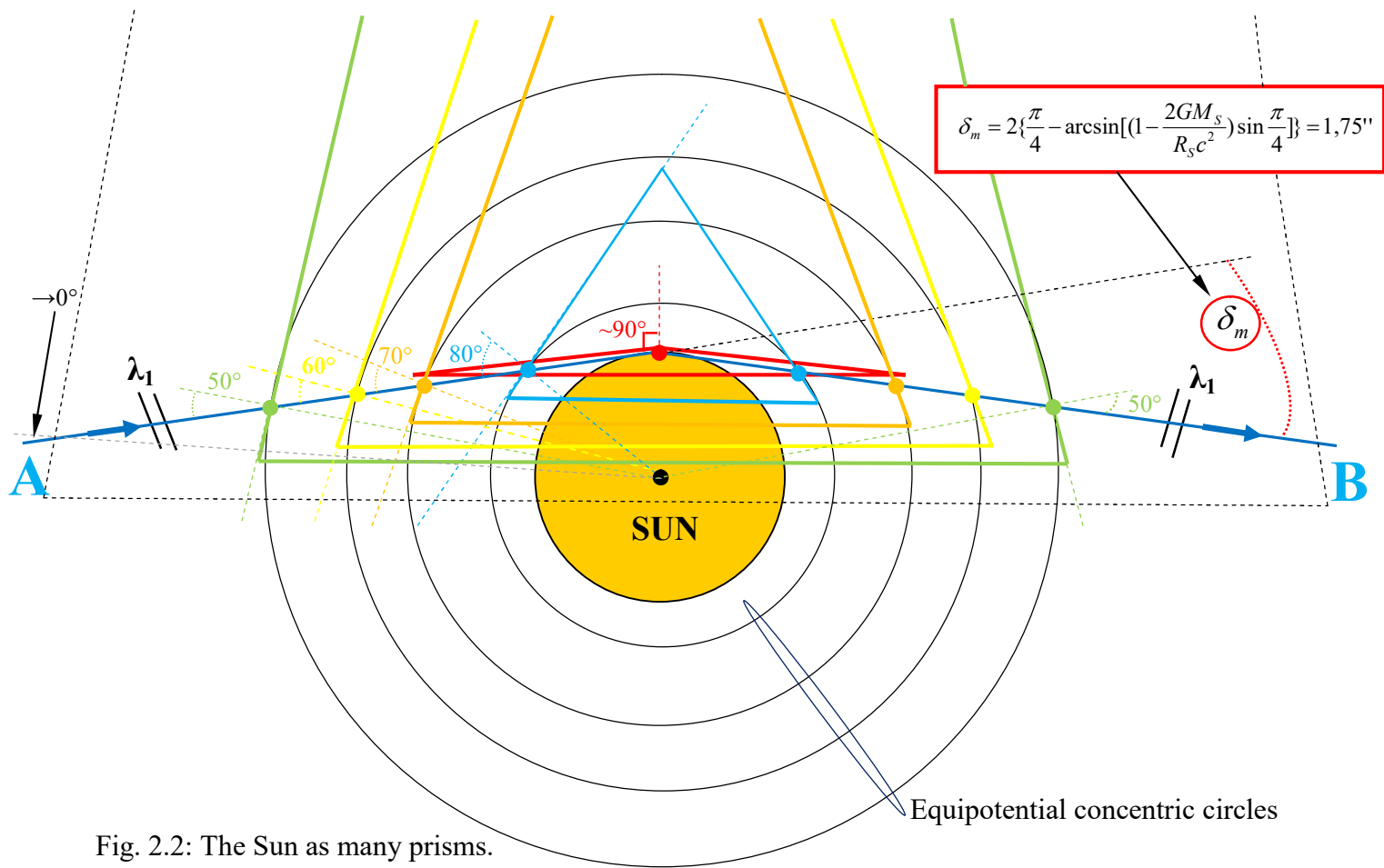


Fig. 2.2: The Sun as many prisms.

3 – THIRD METHOD (TRADITIONAL METHOD):

-The general equations of motion.

We know the Schwarzschild Solution (see Appendix 1):

$d\tau^2 = B(r)dt^2 - A(r)dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\varphi^2 = -g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ and we also consider the geodesic

equation (see Appendix 2): $\frac{d^2x^\mu}{dp^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu}{dp} \frac{dx^\lambda}{dp} = 0$ (in p generic, for the moment):

we have, by making μ change: $(\Gamma_{\nu\lambda}^\nu = \frac{1}{2}g^{\nu\rho}(\frac{\partial g_{\rho\lambda}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\rho}))$

$$0 = \frac{d^2r}{dp^2} + \frac{A'(r)}{2A(r)}\left(\frac{dr}{dp}\right)^2 - \frac{r}{A(r)}\left(\frac{d\theta}{dp}\right)^2 - \frac{r\sin^2\theta}{A(r)}\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 + \frac{B'(r)}{2A(r)}\left(\frac{dt}{dp}\right)^2 \quad (3.1)$$

$$0 = \frac{d^2\theta}{dp^2} + \frac{2}{r}\frac{d\theta}{dp}\frac{dr}{dp} - \sin\theta\cos\theta\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 \quad (3.2)$$

$$0 = \frac{d^2\varphi}{dp^2} + \frac{2}{r}\frac{d\varphi}{dp}\frac{dr}{dp} + 2\cot\theta\frac{d\varphi}{dp}\frac{d\theta}{dp} \quad (3.3)$$

$$0 = \frac{d^2t}{dp^2} + \frac{B'(r)}{B(r)}\frac{dt}{dp}\frac{dr}{dp} \quad (3.4)$$

Now, as the field is isotropic, we put $\theta = \pi/2$ and so the last two equations, (3.3) and (3.4), becomes:

$$\frac{d}{dp}\left[\ln\frac{d\varphi}{dp} + \ln r^2\right] = 0 \quad \text{and} \quad \frac{d}{dp}\left[\ln\frac{dt}{dp} + \ln B\right] = 0, \text{ from which:}$$

$$r^2\frac{d\varphi}{dp} = J \text{ (constant)} \quad (3.5)$$

$$\frac{dt}{dp}B = \text{const} \quad (=1, \text{ by choice}) \quad (3.6)$$

from which: $\frac{dt}{dp} = \frac{1}{B}$. Now, by putting (3.5), (3.6) and the condition ($\theta = \pi/2$) used before, in the

(3.1), we'll have:

$$0 = \frac{d^2r}{dp^2} + \frac{A'(r)}{2A(r)}\left(\frac{dr}{dp}\right)^2 - \frac{J^2}{r^3A(r)} + \frac{B'(r)}{2A(r)B^2(r)} \quad \text{and by multiplying, now, by } 2A(r)\frac{dr}{dp} :$$

$$\frac{d}{dp}\left[A(r)\left(\frac{dr}{dp}\right)^2 + \frac{J^2}{r^2} - \frac{1}{B(r)}\right] = 0 \text{ that is:}$$

$$A(r)\left(\frac{dr}{dp}\right)^2 + \frac{J^2}{r^2} - \frac{1}{B(r)} = -E \text{ (constant)} \quad (3.7)$$

If now we make a system with the equations ($\theta = \pi/2$) just used, then the (3.5), (3.6) and (3.7), we get:

$$d\tau^2 = E dp^2 \quad (3.8)$$

We know that $E=0$ for photons and $E>0$ for material particles.

As $A(r)$ is always positive, we have that the particle can reach r only if (see (3.7)):

$$\frac{J^2}{r^2} + E \leq -\frac{1}{B(r)}. \text{ Then, by using (3.6) in (3.5), (3.7) and (3.8), we get:}$$

$$r^2\frac{d\varphi}{dt} = JB(r) \quad (3.9)$$

$$\frac{A(r)}{B^2(r)} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{J^2}{r^2} - \frac{1}{B(r)} = -E \quad (3.10)$$

$$\text{and } d\tau^2 = EB^2(r)dt^2 \quad (3.11)$$

Now we know that, for weak fields: $B - 1 = 2\phi \rightarrow r^2 \frac{d\phi}{dt} = J$ and

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{J^2}{2r^2} + \phi \cong \frac{1-E}{2} \quad (3.12)$$

as: $-\frac{1}{B(r)} = -\frac{1}{1+2\phi} \cong (\text{for Taylor}) \cong -(1-2\phi)$

(3.12) has got a similar correspondance in Newton's classic mechanics.

For general orbits, $r=r(\phi)$; then, we know that:

$$\begin{cases} r^2 \frac{d\phi}{dp} = J \\ A(r) \left(\frac{dr}{dp} \right)^2 + \frac{J^2}{r^2} - \frac{1}{B(r)} = -E \end{cases}$$

$$\text{if we get rid of dp, we have: } \frac{A(r)}{r^4} \left(\frac{dr}{d\phi} \right)^2 + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{J^2 B(r)} = -\frac{E}{J^2}, \quad (3.13)$$

whose solution is:

$$\phi = \pm \int \frac{A^{1/2}(r) dr}{r^2 \left(\frac{1}{J^2 B(r)} - \frac{E}{J^2} - \frac{1}{r^2} \right)^{1/2}} \quad (3.14)$$

-The deflection of light by the Sun.

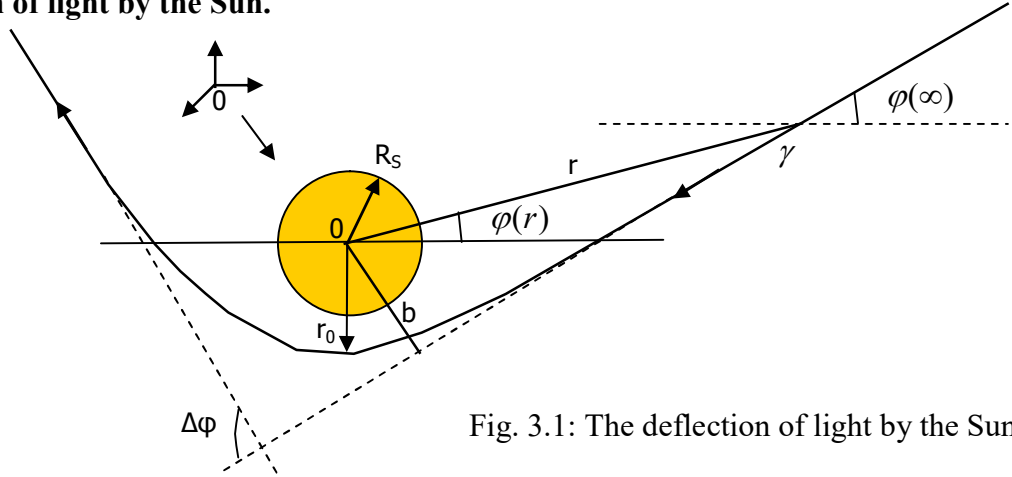


Fig. 3.1: The deflection of light by the Sun.

$R_s = R_{Sun}$; b is the collision parameter. At the infinite, $b = r \sin(\phi - \phi_\infty) \cong r(\phi - \phi_\infty)$ and:

$$-V = \frac{d}{dt} r \cos(\phi - \phi_\infty) \cong \frac{dr}{dt}; V \text{ is the motion speed (constant). As at the infinite } A=B=1, \text{ if we put}$$

these two equations in (3.9) and (3.10), we have:

$$J = bV \text{ and} \quad (3.15)$$

$$E = 1 - V^2 \quad (3.16)$$

(3.16) is trivial; in order to get the (3.15), we see that:

$$b \cong r(\phi - \phi_\infty), \text{ from which: } 0 = dr(\phi - \phi_\infty) + r d\phi, \text{ and so: } r^2 \frac{d\phi}{dt} = -\frac{dr}{dt}(\phi - \phi_\infty)r = bV = J$$

For $r = r_0$ we have that $dr/d\varphi = 0$ and (3.13) then becomes: $J = r_0 \left(\frac{1}{B(r_0)} - 1 + V^2 \right)^{1/2}$ and (3.14)

becomes, after an easy calculation:

$$\varphi(r) = \varphi(\infty) + \int_r^\infty \frac{A^{1/2}(r)dr}{r^2 \left[\frac{1}{r_0^2} \left(\frac{1}{B(r)} - 1 + V^2 \right) \left(\frac{1}{B(r_0)} - 1 + V^2 \right)^{-1} - \frac{1}{r^2} \right]^{1/2}} \quad (3.17)$$

The total variation of φ is: $2|\varphi(r_0) - \varphi_\infty|$, while, if the ray of light walked unperturbed, we would have a variation of π , so, with reference to Fig. 3.1, we have: $\Delta\varphi = 2|\varphi(r_0) - \varphi_\infty| - \pi$; for a photon, $V^2 = 1$ and (3.17) yields:

$$\varphi(r) - \varphi(\infty) = \int_r^\infty A^{1/2}(r) \left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \left(\frac{B(r_0)}{B(r)} \right) - 1 \right]^{-\frac{1}{2}} \frac{dr}{r} \quad (3.18)$$

Now, by using the (Taylor's) developments due to Robertson (introduced in Appendix 1 and here under the convention $c=1$):

$A(r) = 1 + 2\frac{GM}{r} + \dots$, $B(r) = 1 - 2\frac{GM}{r} + \dots$, we have:

$$\begin{aligned} \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \left(\frac{B(r_0)}{B(r)} \right) - 1 &= \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \left[\frac{1 - 2\frac{GM}{r_0} + \dots}{1 - 2\frac{GM}{r} + \dots} \right] - 1 = \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \left[1 + 2GM \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) + \dots \right] - 1 \cong \\ &\cong \left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^2 + \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 2GM \frac{(r_0 - r)}{rr_0} - 1 \right] = \left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^2 - 1 \right] \left[1 - \frac{2GMr}{r_0(r + r_0)} + \dots \right] \end{aligned}$$

The last equality can be directly verified.

(3.18) becomes, for Taylor:

(in order to solve the first two integrals, put $\frac{r_0}{r} = \cos x$, while for the third, put $\frac{r_0}{r} = t$ and the

integral will be $\frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t}}$)

1st Int.	2nd Int.	3rd Int.
-------------	-------------	-------------

$$\varphi(r) - \varphi(\infty) = \int_r^\infty \frac{1}{r} \left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^2 - 1 \right]^{-\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{GM}{r} + \frac{GMr}{r_0(r + r_0)} + \dots \right] dr$$

(the three terms in the yellow frame come from the product between $A^{1/2}(r) = 1 + \frac{GM}{r} + \dots$ and

$\left[1 - \frac{2GMr}{r_0(r + r_0)} + \dots \right]^{-1/2} \cong \left[1 + \frac{GMr}{r_0(r + r_0)} + \dots \right]$, and the fourth has been neglected, as it was much lower than the others, as

we have to consider that we are under the convention $c=1$ and in the denominators there would be some c^2 and the fourth neglected term would have been even a c^4 at its denominator)

that is: $\varphi(r) - \varphi(\infty) = \sin^{-1} \left(\frac{r_0}{r} \right) + \frac{GM}{r_0} \left[1 + 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{r_0}{r} \right)^2} - \sqrt{\frac{r - r_0}{r + r_0}} \right] + \dots$ and so:

$\Delta\varphi = \frac{4GM}{r_0}$, and if we remind our normalization ($c=1$), we finally have: $\Delta\varphi = \frac{4GM}{r_0 c^2}$; with

$r_0 = R_s = 6,95 \cdot 10^8 m$ and $M_s = 1,97 \cdot 10^{30} kg$, we have: $\Delta\varphi = 1,75''$, in perfect agreement with experimental results. In reality, when in 1919 the deflection of star light by the Sun was measured in Brazil, during an eclipse, the accuracy of the measurement was as big as the measure itself.

APPENDIXES

APPENDIX 1: THE SCHWARZSCHILD SOLUTION:

-Gravity slows down the time

Also gravity slows down the time! On a mountain time elapses faster than down in the valley. Of course, on the Earth, the difference is imperceptible, but on a neutron star or in a black hole, that effect is very strong.

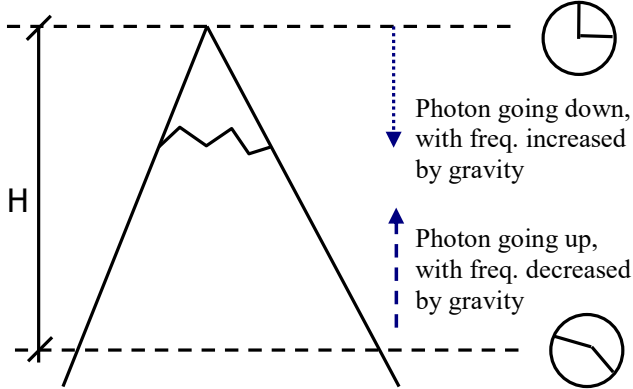


Fig. A1.1: Mountain, gravity and time.

$\Delta E = m_0 g H$ (delta energy from the level difference); $\Delta E = h \Delta \nu$ (delta energy due to the freq. decrease of the photon). From them: $\Delta \nu = m_0 g H / h$. For a photon, $E = h \nu$, but in relativity: $E = m_0 c^2$, from which, for a photon: $m_0 = h \nu / c^2$ and so, for $\Delta \nu : \Delta \nu = \nu g H / c^2$ and as time is the reciprocal of the frequency, we have: $\Delta \nu / \nu = \Delta t / t$ and so:

$$\Delta t = \frac{gH}{c^2} t \quad . \quad (A1.1)$$

Therefore, over a time t , we have a slow down Δt due to gravity! We know that the escape velocity of a celestial body whose mass is M and radius R is: $V = \sqrt{2GM/R}$. If on that body an object is cast vertically with the escape velocity, it will quit the gravitational field of that celestial body and will go towards the infinite, without falling down anymore.

A black hole is a body so compressed (big M and small R) that the escape velocity on its surface reaches the speed of light and so not even the light can escape, from which the name of black hole; moreover, for what above said, we can say that in a black hole time is approximately stopped!

Now, jumping back to the time slowing, for the (A1.1): $\Delta t = \frac{gH}{c^2} t$, which can be seen as:

$dt = \frac{gdr}{c^2} t$ and considering that $|g| = \frac{GM}{r^2}$, it follows that: $dt = t \frac{GM}{c^2 r^2} dr$, that is:

$$\frac{dt}{t} = \frac{GM}{c^2} \frac{dr}{r^2} \rightarrow \int \frac{dt}{t} = \frac{GM}{c^2} \int \frac{dr}{r^2} \rightarrow \ln t = -\frac{GM}{c^2 r} + k \rightarrow$$

$$t = k \cdot e^{\frac{-GM}{c^2 r}} \rightarrow (e^{-x} \approx 1 - x) \rightarrow t = k(1 - \frac{GM}{c^2 r}) \rightarrow (t = t_0 \gg r = \infty) \rightarrow t = t_0(1 - \frac{GM}{c^2 r}) \rightarrow$$

$$(\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{1}{2}x) \rightarrow t = t_0 \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} \quad . \quad (A1.2)$$

On the other hand, we know that the formula for the Lorentz's contraction has the same look of that for the time dilation, but with the root at the denominator, so:

$$r = r_0 / \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} \quad . \quad (A1.3)$$

-The Schwarzschild solution

We know that, in general: $d\tau^2 = c^2(dt)^2 - (d\vec{x})^2$ (four-dimension invariant) and as, for a photon, $(d\vec{x})^2 = c^2(dt)^2$, then we have: $d\tau^2 = 0$ (for a photon, indeed).

Still starting from the metric tensor: $d\tau^2 = c^2dt^2 - dr^2 = c^2dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)$ we jump to the more simple spherical coordinates:

$$d\tau^2 = c^2dt^2 - (dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2) . \quad (A1.4)$$

but because of the (A1.2) and (A1.3):

$$dt = dt_0 \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} \rightarrow dt^2 = dt_0^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) = dt_0^2 \underline{B(r)} \text{ and:}$$

$$dr^2 = dr_0^2 / \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \cong dr_0^2 \left(1 + \frac{2GM}{c^2 r}\right) = dr_0^2 \underline{A(r)} , \text{ as, according to Taylor: } 1/(1-x) \cong (1+x) .$$

Moreover, we have no Lorentz contraction on transversal directions (y and z, or also θ and φ , as an example), so, for the (A1.4):

$$d\tau^2 = B(r)c^2dt^2 - A(r)dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\varphi^2 \quad (\text{Schwarzschild Solution}) \quad (A1.5)$$

(and after having renamed r and t) Now, if we use it on a photon, we get:

$0 = B(r)c^2dt^2 - A(r)dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\varphi^2$; moreover, if we consider light radially travelling towards the Sun, we can get rid of the components in $d\theta$ and $d\varphi$:

$$0 = B(r)c^2dt^2 - A(r)dr^2 ; \quad (A1.6)$$

the speed of light is $c = dr/dt$ far from the mass of the Sun, while, close to it, the (A1.6) holds, from which we get:

$$V = dr/dt = c(B(r)/A(r))^{1/2} \neq c ; \quad (A1.7)$$

so, being: $B(r) = [1 - \frac{2GM}{rc^2}]$ and $A(r) = [1 - \frac{2GM}{rc^2}]^{-1} \cong [1 + \frac{2GM}{rc^2}]$, then from the developments on

the variable $\frac{2GM}{rc^2}$ used on the (A1.7), we easily have that:

$$V/c = ([1 - \frac{2GM}{rc^2}]) / ([1 + \frac{2GM}{rc^2}])^{1/2} \cong [1 - \frac{2GM}{2rc^2}] [1 - \frac{2GM}{2rc^2}] \cong [1 - \frac{2GM}{rc^2}] , \text{ that is:}$$

$$V \cong c[1 - \frac{2GM}{rc^2}] \quad (A1.8)$$

APPENDIX 2: The Geodesic:

A free falling parachutist does not have any floor over which his body can rest; therefore, he does not detect any gravitational acceleration and he feels as if floating in the vacuum. He realizes he is falling only if he looks at the moving objects around. Therefore, for a free falling particle, there is a reference system in which $\vec{a} = 0$, that is:

$$\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial \tau^2} = 0 \quad (\text{free falling in Euclidean coordinates}) \quad (A2.1)$$

with $d\tau^2 = -\eta_{ik} d\xi^i d\xi^k$. But we can see (A2.1) in the following way:

$$\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial \tau^2} = 0 = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} .$$

If we multiply both sides by $\frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}$ and consider that: $\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} = \delta_\mu^\lambda$, we'll have:

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad (\text{free falling in curvilinear coordinates}) \quad (A2.2)$$

(equation of the geodesic, where geodesic, on the Earth, is the shortest path between two places)

APPENDIX 3: REFRACTION AND SNELL'S LAW

-Refraction

-The Lifeguard

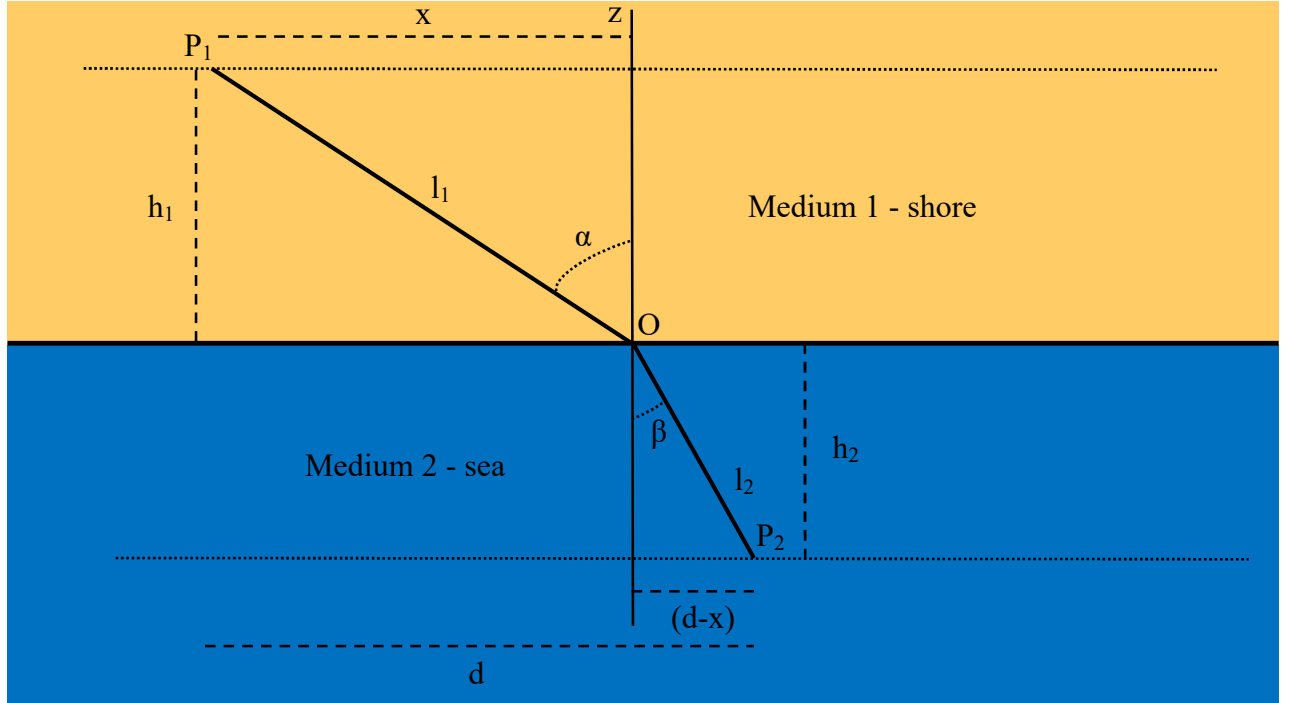


Fig. A3.1: The Lifeguard in P_1 sees the bather in trouble in P_2 .

The Lifeguard in P_1 has to reach and help the bather in P_2 ; but he also knows that the speed v_1 of running on the shore is higher than the swimming speed v_2 in the water, so the geometrically shortest path given by the segment P_1 - P_2 is not the fastest, as it forces the Lifeguard to stay too long in the water, where he is slower.

We evaluate the travelling time of the Lifeguard:

$$t_B = \frac{P_1 - O}{v_1} + \frac{O - P_2}{v_2} = \frac{l_1}{v_1} + \frac{l_2}{v_2} = \frac{\sqrt{h_1^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{h_2^2 + (d-x)^2}}{v_2}$$

Now, in order to evaluate the minimum value t_B , we calculate the derivative and we put it to zero:

$$\frac{dt_B}{dx} = \frac{2x}{v_1 \sqrt{h_1^2 + x^2}} - \frac{2(d-x)}{v_2 \sqrt{h_2^2 + (d-x)^2}} = 0, \text{ but we have:}$$

$$\frac{x}{\sqrt{h_1^2 + x^2}} = \sin \alpha \quad \text{and} \quad \frac{(d-x)}{\sqrt{h_2^2 + (d-x)^2}} = \sin \beta, \text{ so: } \frac{dt_B}{dx} = \frac{2 \sin \alpha}{v_1} - \frac{2 \sin \beta}{v_2} = 0, \text{ that is:}$$

$$\frac{v_1}{\sin \alpha} = \frac{v_2}{\sin \beta} = k, \quad (\text{A3.1})$$

therefore, in both media (medium 1 and medium 2), the ratio between the sine of the angle made with the vertical line and the speed is constant.

Snell's Law

If paths l_1 and l_2 were light rays and media 1 and 2 were, for instance, air and water, then, after considering that for the refraction indexes n_1 and n_2 we have, by definition:

$$n_1 = \frac{c}{v_1} \quad \text{and} \quad n_2 = \frac{c}{v_2}, \quad (\text{A3.2})$$

we get the Snell's Law:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{v_1/c}{v_2/c} = \frac{c/v_2}{c/v_1} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21} = n, \quad (\text{A3.3})$$

which is the reason why a ladder into a pool looks bent. n_{21} is the relative refraction index of mean 2 with respect to mean 1. As $v_1 \neq v_2$, that is: $v_i \neq v_r$ ("i" stands for incident radiation, while "r" represents the refracted one) and $v_i = \lambda_i f_i$, $v_r = \lambda_r f_r \rightarrow \lambda_i = \frac{v_i}{f_i} = \frac{c/n_1}{\omega_i/2\pi} = \frac{c}{n_1} \frac{2\pi}{\omega_i}$ and

$$\lambda_r = \frac{v_r}{f_r} = \frac{c/n_2}{\omega_r/2\pi} = \frac{c}{n_2} \frac{2\pi}{\omega_r}; \text{ if, as we will see, we are in the situation of } f_1=f_2, \text{ then } \rightarrow$$

$$\rightarrow \omega_1=\omega_2=\omega=(2\pi)f \rightarrow \lambda_r = \frac{c}{n_2} \frac{2\pi}{\omega} = \frac{c}{n_2} \frac{\lambda_i n_1}{c} = \frac{n_1}{n_2} \lambda_i = n_{12} \lambda_i, \text{ so:}$$

$$\lambda_r = \frac{n_1}{n_2} \lambda_i = n_{12} \lambda_i$$

$$(\text{A3.4})$$

As the Snell's Law has come out as a calculation of the minimum travelling time, then Fermat's Principle is here confirmed, according to which a light ray follows the shortest path (in duration).

Now, as we are dealing with electromagnetic waves (E and B), then we have that:

($\vec{k}$ is the wave vector)

(incident wave)

$$\vec{E}_i = E_{oi} \cdot e^{i(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega_i t)} = E_{oi} \cdot e^{i(\frac{2\pi}{\lambda} \vec{k}_i \cdot \vec{r} - 2\pi f_i t)} \quad \text{and} \quad \vec{B}_i = \frac{n_1}{c} \vec{k}_i \times \vec{E}_i$$

(refracted wave, such out of phase about φ_r)

$$\vec{E}_r = E_{or} \cdot e^{i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega_r t + \varphi_r)} \quad \text{and} \quad \vec{B}_r = \frac{n_2}{c} \vec{k}_r \times \vec{E}_r$$

Then, being $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ (where j is the current density and σ is the conductivity), we have that if we are between insulators or between vacuum and vacuum+gravitational field, then $\sigma=0$ and $\rightarrow$

$\vec{j} = \sigma \vec{E} = 0$ (and this counts first of all along the border between the two means) and the Maxwell's

equations will be those for the vacuum and they will lead to the Wave Equation in both "i" and "r", and the relevant solutions are the above reported ones, for both "i" and "r", (in both zones we claim

$a \propto e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi)}$) and so, while going from "i" to "r", the arguments must stay unchanged:

$(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega_i t) = (\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega_r t + \varphi_r) \rightarrow \varphi_r = 0$, ($\omega_i = \omega_r \rightarrow f_i = f_r$ same frequencies) and $\vec{k}_i \cdot \vec{r} = \vec{k}_r \cdot \vec{r}$;

in particular, we have: $\vec{k}_i \cdot \vec{r} = \vec{k}_r \cdot \vec{r} \rightarrow k_{i-x}x + k_{i-y}y + k_{i-z}z = k_{r-x}x + k_{r-y}y + k_{r-z}z$ and by

considering the y axis as that coming out of the sheet, then we have that $k_{i-y}=0$ (when considering

the incident ray as contained into the x-z plane of the sheet), so: $k_{i-x}x + k_{i-z}z = k_{r-x}x + k_{r-y}y + k_{r-z}z$

and also considering the crossing point of the border ($z=0$, with z as the vertical axis – rif. Fig.

A3.1), then we have: $k_{i-x}x = k_{r-x}x + k_{r-y}y \rightarrow k_{r-y} = 0$ e $k_{i-x} = k_{r-x} \rightarrow$

$\rightarrow \frac{2\pi}{\lambda_i} \sin \alpha = \frac{2\pi}{\lambda_r} \sin \beta$ or also: $\frac{2\pi}{\lambda_i} \sin \theta_i = \frac{2\pi}{\lambda_r} \sin \theta_r \rightarrow \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_r} = \frac{\lambda_i}{\lambda_r} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}$, that is again a confirmation of the Snell's Law.

The Prism

We have a prism made of a transparent material, like in Fig. A3.2:

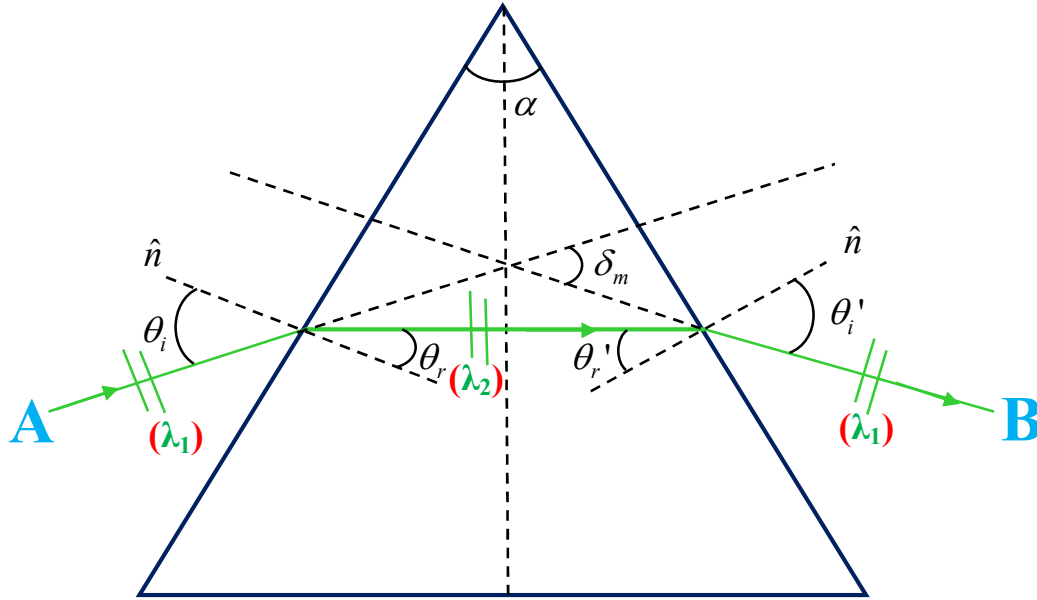


Fig. A3.2: The prism.

δ_m is the deflection angle the light ray undergoes when coming from **A**, then finally leaving the (refractive) prism system and so heading for **B**; moreover, $\delta = \delta_m$ is the lowest when θ_i makes the ray into the prism be parallel to the base and in such a case we also have that $\theta_i = \theta'_i$ and $\theta_r = \theta'_r$. Now we also show that:

$$\theta_i = \frac{\delta_m + \alpha}{2} \quad \text{and} \quad \theta_r = \frac{\alpha}{2}, \quad (\text{A3.5})$$

$$\text{so: } n = \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_r} = \frac{\sin(\frac{\delta_m + \alpha}{2})}{\sin(\frac{\alpha}{2})}; \text{ proof:}$$

$$\text{besides, from both the (A3.5), we get: } \theta_i = \frac{\delta_m + \alpha}{2} = \frac{\delta_m + 2\theta_r}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\delta_m = 2(\theta_i - \theta_r)} \quad (\text{A3.6})$$

Going back to the proof, with reference to Fig. A3.3 below, from the triangle DEB we have:

$$(\pi - \delta) + (\theta_i - \theta_r) + (\theta'_i - \theta'_r) = \pi, \text{ so:}$$

$$\delta = (\theta_i + \theta'_i) - (\theta_r + \theta'_r). \quad (\text{A3.7})$$

$$\text{From the triangle ABD we have: } \alpha + (\frac{\pi}{2} - \theta_r) + (\frac{\pi}{2} - \theta'_r) = \pi, \text{ so:}$$

$$\alpha = (\theta_r + \theta'_r). \quad (\text{A3.8})$$

From the triangle BCD we have: $x + \theta_r + \theta'_r = \pi$, so: $x + \alpha = \pi \rightarrow x = (\pi - \alpha)$; the (A3.7) tells us that $(\theta_i + \theta'_i) = \delta + (\theta_r + \theta'_r) = \delta + \alpha$ (A3.9)

that is: $\delta = (\theta_i + \theta'_i) - \alpha$ and $\frac{d\delta}{d\theta_i} = \frac{d\theta_i}{d\theta_i} + \frac{d\theta'_i}{d\theta_i} = 1 + \frac{d\theta'_i}{d\theta_i} \rightarrow 0 \rightarrow \frac{d\theta'_i}{d\theta_i} = -1$ (A3.10)

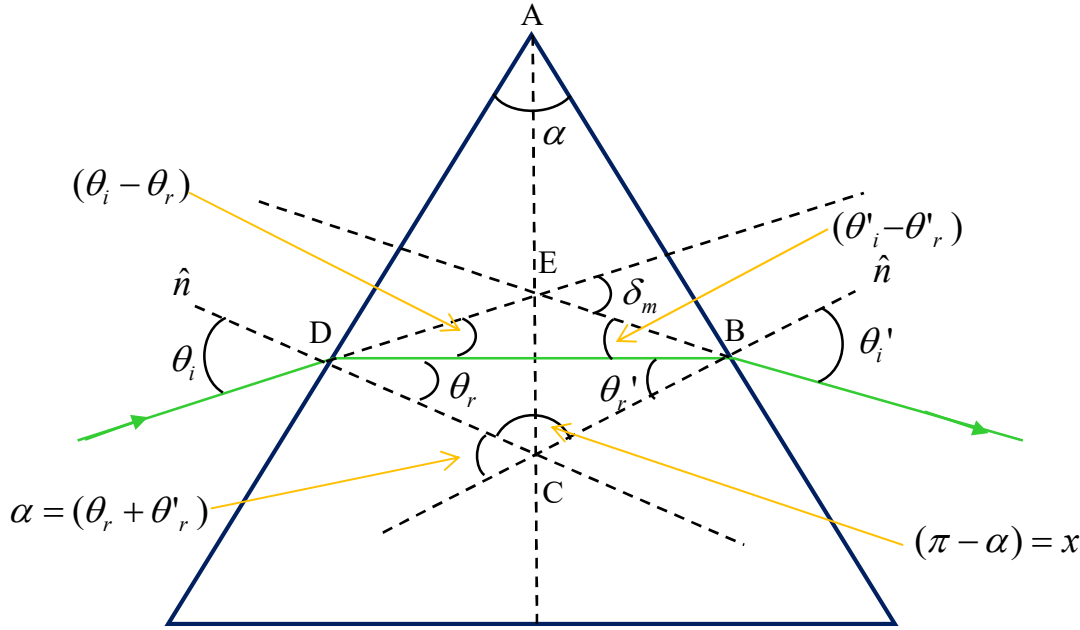


Fig. A3.3: Prism for calculations.

Moreover, due to the Snell's Law, we have: $\sin \theta_i = n \sin \theta_r$ and $\sin \theta'_i = n \sin \theta'_r$, so, by a differentiation: $\cos \theta_i d\theta_i = n \cos \theta_r d\theta_r$ and $\cos \theta'_i d\theta'_i = n \cos \theta'_r d\theta'_r$, but for the (A3.8) we have: $d\theta_r + d\theta'_r = 0 \rightarrow d\theta'_r = -d\theta_r$ and so:

$\cos \theta_i d\theta_i = n \cos \theta_r d\theta_r$ and $\cos \theta'_i d\theta'_i = -n \cos \theta'_r d\theta_r$; now, by carrying out a ratio side by side between those two equations (the last two), we get: $\frac{d\theta'_i}{d\theta_i} = -\frac{\cos \theta'_r \cos \theta_i}{\cos \theta_r \cos \theta'_i}$, but as we

already know that $\frac{d\theta'_i}{d\theta_i} = -1$ and $\theta'_r = \alpha - \theta_r$, then we get: $\frac{\cos(\alpha - \theta_r) \cos \theta_i}{\cos \theta_r \cos \theta'_i} = 1 \rightarrow \theta_i = \theta'_i$

(in order to have $\frac{\cos \theta_i}{\cos \theta'_i} = 1$) and $\theta_r = \frac{\alpha}{2} = \theta'_r$ (as: $\frac{\cos(\alpha - \theta_r)}{\cos \theta_r} = \frac{\cos(\alpha - \frac{\alpha}{2})}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = 1$).

At last, because of the (A3.9), we have:

$$(\theta_i + \theta'_i) = 2\theta_i = 2\theta'_i = \delta + \alpha , \text{ that is: } \theta_i = \theta'_i = \frac{(\delta_m + \alpha)}{2} \text{ (and } \theta_r = \theta'_r = \frac{\alpha}{2} \text{).}$$

We have written δ_m and not just δ because of the zero value of the derivative of the (A3.10).

APPENDIX 4: The Gravitational Lensing:

Let's explain that through an image:

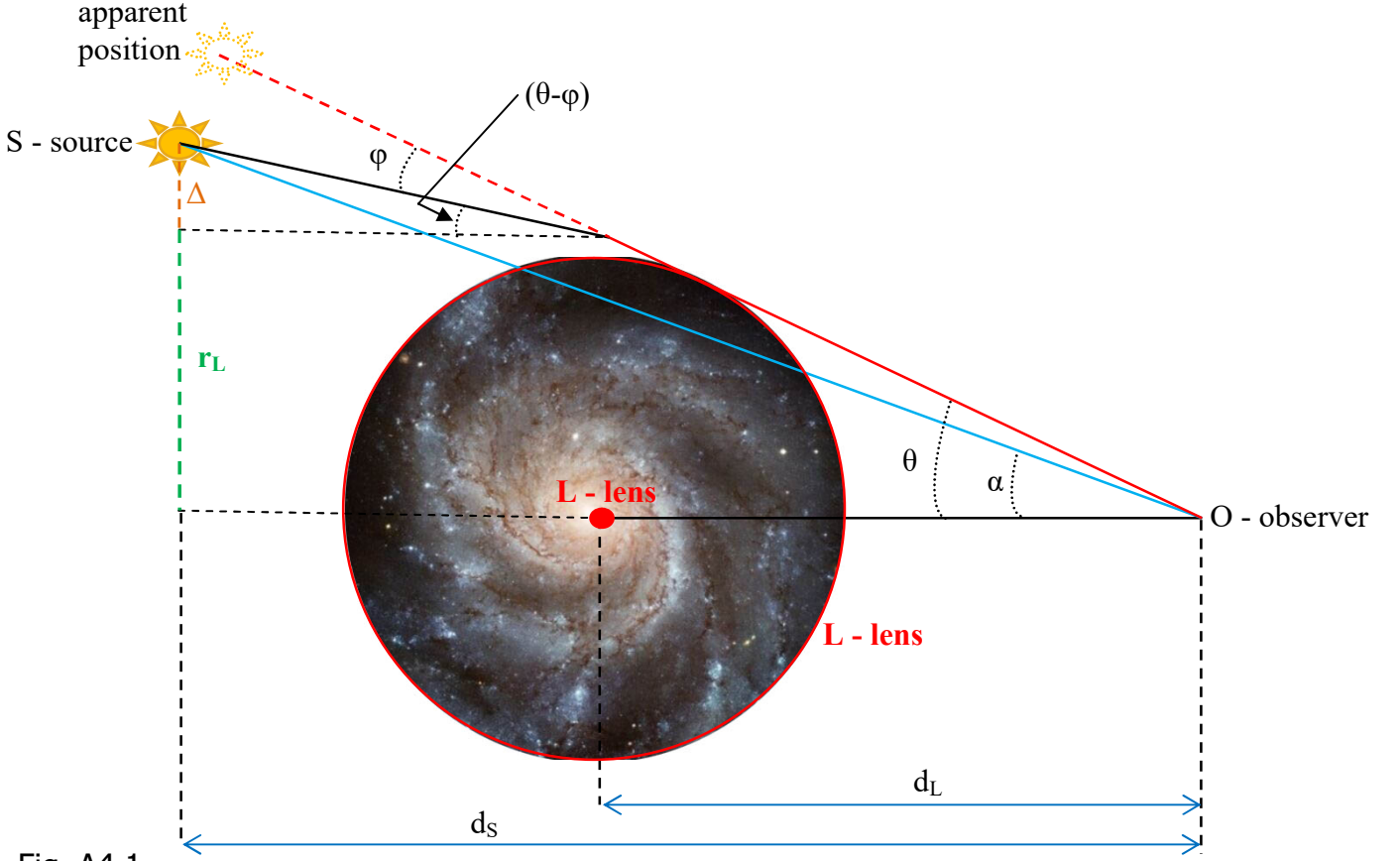
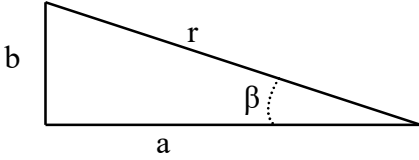


Fig. A4.1



We preliminarily remind you that we have, for small β :

$$b = a \tan \beta \cong a\beta \cong r\beta$$

So we can write that: $r_L = \theta d_L \rightarrow \theta d_L - r_L = 0 \rightarrow \theta d_L - r_L + \theta d_S - \theta d_S = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow \theta d_S - r_L - \theta(d_S - d_L) = 0 \rightarrow \theta d_S r_L - r_L^2 - r_L \theta(d_S - d_L) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \theta d_S r_L - r_L^2 - r_L \theta(d_S - d_L) + r_L \phi(d_S - d_L) - r_L \phi(d_S - d_L) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \theta d_S r_L - r_L^2 - r_L(d_S - d_L)(\theta - \phi) - r_L \phi(d_S - d_L) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \theta d_S r_L - r_L[r_L + (d_S - d_L)(\theta - \phi)] - r_L \phi(d_S - d_L) = 0$$

(A4.1)

Now, we notice that: $\alpha d_S = r_L + \Delta = r_L + (d_S - d_L)(\theta - \phi)$ (and $r_L = \theta d_L$), so, for the (A4.1):

$$\theta d_S(r_L) - (r_L)[r_L + (d_S - d_L)(\theta - \phi)] - r_L \phi(d_S - d_L) = \theta d_S(\theta d_L) - (\theta d_L)[\alpha d_S] - r_L \phi(d_S - d_L) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \theta^2 d_S d_L - \theta \alpha d_S d_L - r_L \phi(d_S - d_L) = 0 \rightarrow \theta^2 - \alpha \theta - r_L \phi \frac{(d_S - d_L)}{d_S d_L} = 0 .$$

Now, after considering the (1.7) (see above) for a generic ϕ ($\phi = \frac{4GM_L}{r_L c^2}$), we get:

$$\boxed{\theta^2 - \alpha \theta - \frac{4GM_L}{c^2} \frac{(d_S - d_L)}{d_S d_L} = 0}$$

(A4.2)

Solutions are: $\theta_{1,2} = \frac{\alpha}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{\alpha^2 + \frac{16GM_L}{c^2} \frac{(d_S - d_L)}{d_S d_L}}$ and we have: $\theta_1 + \theta_2 = \alpha$ and:

$$\theta_1 \theta_2 = -\frac{4GM_L}{c^2} \frac{(d_S - d_L)}{d_S d_L}, \text{ so:}$$

$$M_L = -\frac{\theta_1 \theta_2 c^2}{4G} \frac{d_S d_L}{(d_S - d_L)} \quad (\text{A4.3})$$

At last, if the hidden source object is exactly behind the lens and so source + lens + observer lie on the same line, then it will be $\alpha=0$, so we will have two identical solutions θ_1 and θ_2 (θ_E):

$$\theta_E = \sqrt{\frac{4GM_L}{c^2} \frac{(d_S - d_L)}{d_S d_L}} \quad (\text{A4.4})$$

The source will appear as a ring, or it will appear in many points anyway, all around the lens.

Examples of gravitational lenses:

-Quasar QSO 0957+561 A/B, double quasar, with $\theta_1=5,35''=2,59 \times 10^{-5}$ rad and $\theta_2=-0,8''=-3,87 \times 10^{-6}$ rad. The source is a quasar with redshift $z_S=1,413$, while the lens (elliptic galaxy YGKOW G1) has a $z_L=0,355$. Then, we have: $d_S=9,1 \times 10^{25}$ m = 9,6 billions l.y.; then: $d_L=3,6 \times 10^{25}$ m = 3,82 billions l.y., so, thanks to the (A4.3), we get:

$$M_L = -\frac{\theta_1 \theta_2 c^2}{4G} \frac{d_S d_L}{(d_S - d_L)} = 20,14 \cdot 10^{41} \text{ kg} \cong 10,17 \cdot 10^{11} M_{\text{Sun}} \quad (\text{plausible!})$$

-Einstein Ring MG1131+0456 at radio wavelength (lens galaxy with $z_L=0,844$ and source quasar (which looks double) with $z_S=1,849(?)$).

-Einstein Ring B1938+666 with $z_L=0,881$ and $z_S=2,059$.

-**Einstein Cross Q2237+031** (central galaxy (spiral ZW 2237 +030, 400 mln l.y. distant) as a lens ($z_L=0,04$) and four images (in a cross) of quasars (G 2237 +0305 - $z_S=1,69$, distance 8 billions l.y.) all around). (Someone points out that there is a bridge of material between one of the 4 images and the central galaxy)

-Einstein Cross J2211+3050 (lens elliptic galaxy with $z_L=0,556$ ($M_L=4,5 \times 10^{10} M_{\text{Sun}}$) and source remote galaxy, with $z_S=3,03$).

At last, let's give an example of use of the (1.4) on an Einstein Ring with lens ($z_L=0,5$) at halfway between observer and source ($d_S=2d_L$) and $M_L=10^{11} M_{\text{Sun}} \sim 2 \times 10^{41}$ kg :
(being z_L relatively small: $d_L \sim v_L/H = cz_L/H = 6,4 \times 10^{25}$ m = 6,8 billions l.y.)

$$(H \cong 72 \text{ km}/(\text{s} \cdot \text{Mpc}) \cong 2,338 \cdot 10^{-18} [(\frac{\text{m}}{\text{s}})/\text{m}])$$

$$\theta_E = \sqrt{\frac{4GM_L}{c^2} \frac{(d_S - d_L)}{d_S d_L}} = \sqrt{\frac{2GM_L}{c^2 d_L}} \cong 2,15 \cdot 10^{-6} \text{ rad} = 0,45''$$

-The Einstein's Elevator:

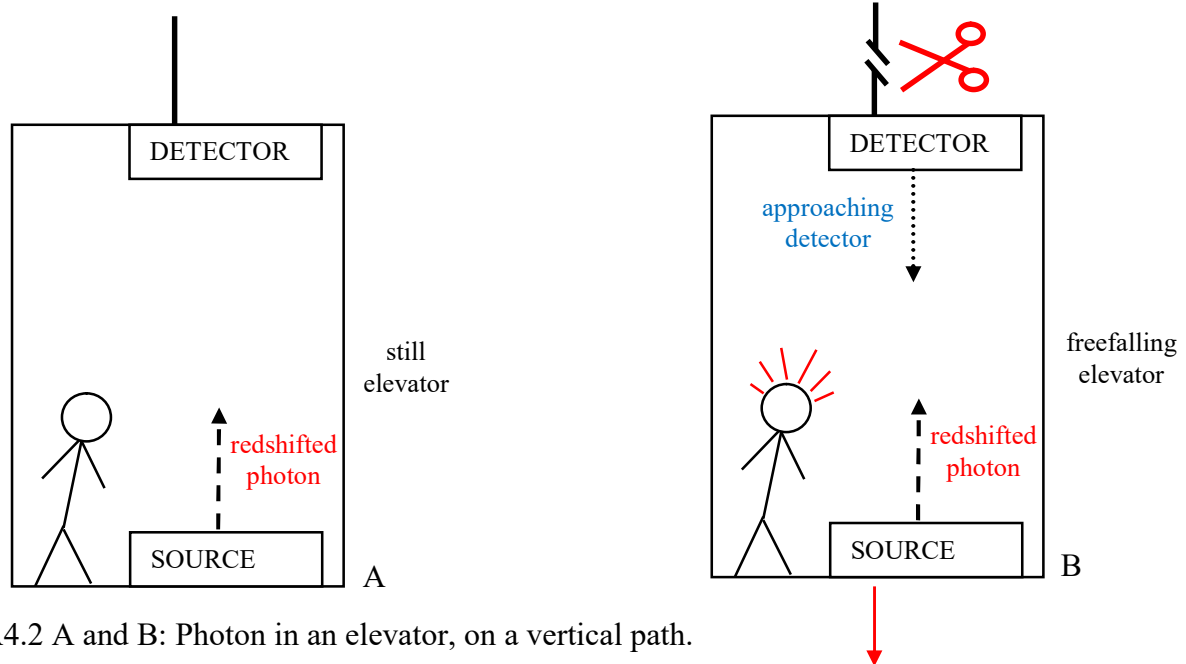


Fig. A4.2 A and B: Photon in an elevator, on a vertical path.

-Fig. A4.2 A: the photon finds hard the climbing because of the gravitational redshift of the Earth.

-Fig. A4.2 B: when the cable is cut, the falling observer doesn't feel anymore the gravitational pull, because of the free fall, so the photon doesn't experience any shift and the same situation, by principle, should be seen by the observer on the ground; in fact, he still detects the existence of the gravitational pull (redshift), but simultaneously there is an approaching-like blueshift of the detector towards the climbing photon, with a mutual compensation.

-Fig. A4.3 A: the observer in the still elevator sees the photon bending downwards because of the gravitational pull. The same is seen by the observer on the ground on the Earth surface.

-Fig. A4.3 B: the cable is then cut and the free falling cancels the gravitational pull for the falling observer: the photon goes straight ahead. The observer on the ground is in a gravitational context and sees the photon starting from a higher altitude and arriving at a lower one, so it bends! Gravity bends the light! On the other hand, while the photon bends downwards, the detector goes down, so that also the observer on the ground, if in an elevator/photon context, in the end thinks it's like if the photon went straight ahead.

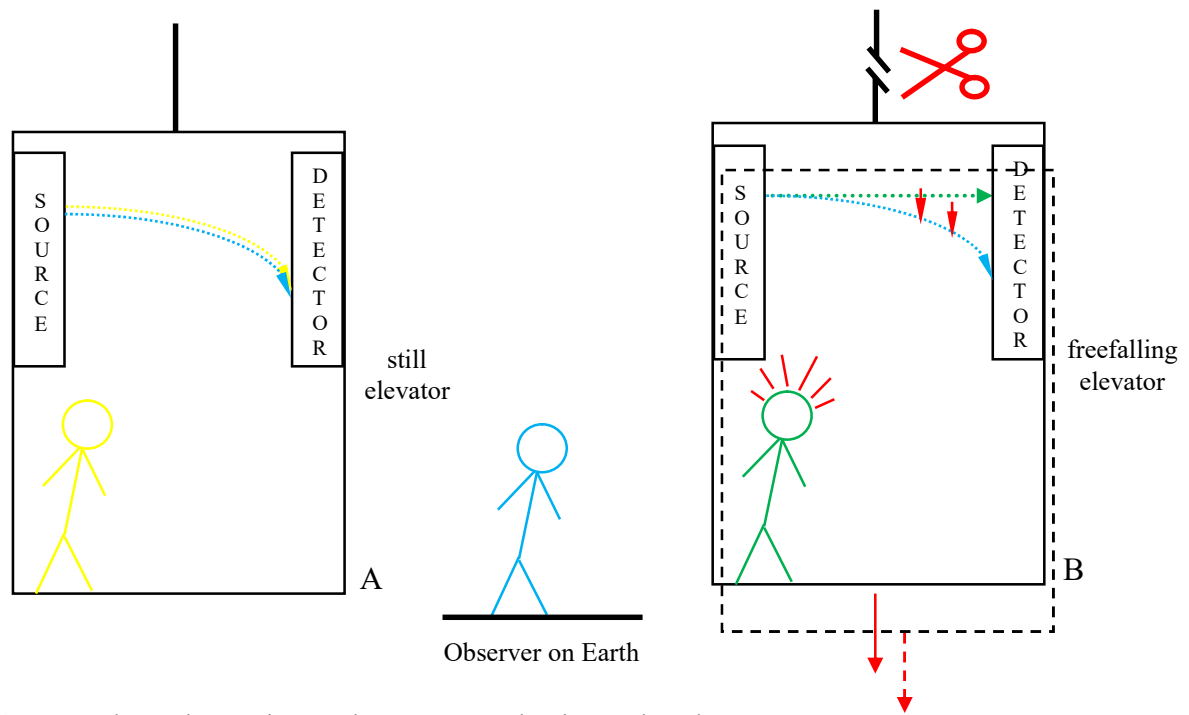
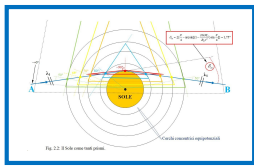


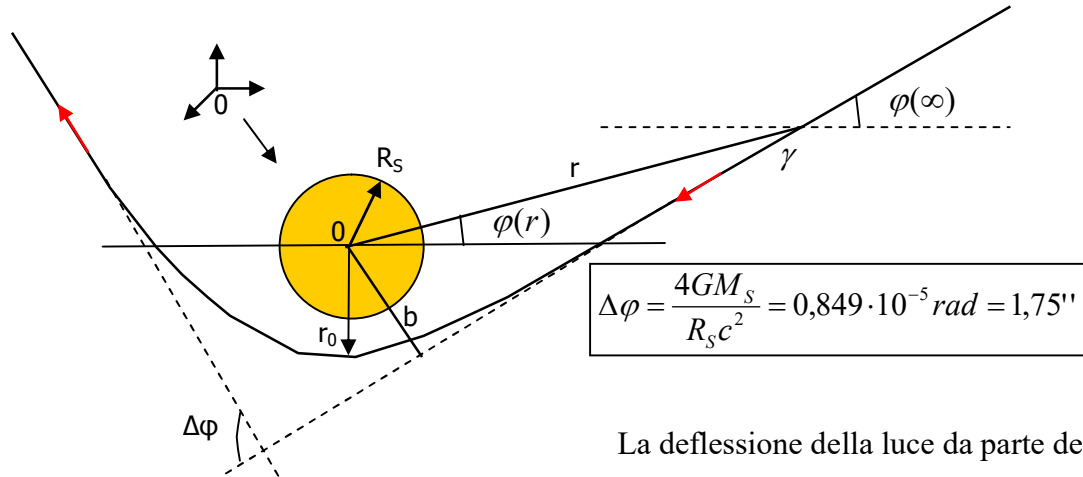
Fig. A4.3 A and B: Photon in an elevator, on a horizontal path.



CALCOLO DELLA DEFLESSIONE DELLA LUCE DA PARTE DEL SOLE TRE METODI:

Leonardo Rubino
Agosto 2025

Abstract: Calcolo della deflessione della luce da parte del Sole - tre metodi.



La deflessione della luce da parte del Sole.

1 – PRIMO METODO (BASATO SULLA DIFFERENZA DI VELOCITÀ DELLA LUCE IN PROSSIMITÀ DEL SOLE):

Partiamo dalla Soluzione di Schwarzschild (vedere Appendice 1):

$$d\tau^2 = B(r)c^2 dt^2 - A(r)dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2, \text{ con } A(r) = \left(1 + \frac{2GM}{c^2 r}\right) \text{ e } B(r) = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right).$$

Applicandola al fotone: $0 = B(r)c^2 dt^2 - A(r)dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$; inoltre, considerando luce che viaggia radialmente verso il Sole, possiamo annullare le componenti in $d\theta$ e $d\varphi$:

$$0 = B(r)c^2 dt^2 - A(r)dr^2; \quad (1.1)$$

la velocità della luce è $c = dr/dt$ lontano dalla massa del Sole, mentre in prossimità dello stesso vale la (1.1), dalla quale si ricava che:

$$V = dr/dt = c(B(r)/A(r))^{1/2} \neq c; \quad (1.2)$$

essendo quindi: $B(r) = [1 - \frac{2GM}{rc^2}]$ e $A(r) = [1 - \frac{2GM}{rc^2}]^{-1} \cong [1 + \frac{2GM}{rc^2}]$, allora dagli sviluppi in serie

sulla variabile $\frac{2GM}{rc^2}$ applicati alla (1.2), si ha banalmente che:

$$V/c = ([1 - \frac{2GM}{rc^2}]) / ([1 + \frac{2GM}{rc^2}])^{1/2} \cong [1 - \frac{2GM}{2rc^2}][1 - \frac{2GM}{2rc^2}] \cong [1 - \frac{2GM}{rc^2}], \text{ ossia:}$$

$$V \cong c[1 - \frac{2GM}{rc^2}] \quad (1.3)$$

Questo primo metodo fa dunque leva sulla variazione di velocità che la luce subisce quando si approssima ad una massa (vedere la (1.3)).

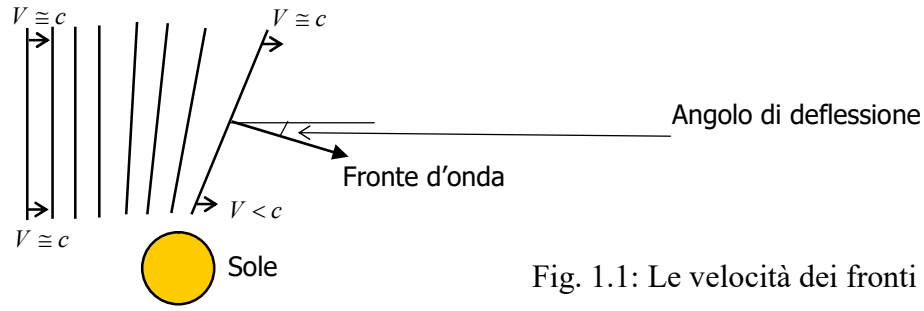


Fig. 1.1: Le velocità dei fronti d'onda.

Con riferimento alla Figura 1.1, la parte di fronte d'onda che è più lontana dalla massa M ha velocità c , mentre quella più vicina ha velocità $V < c$.

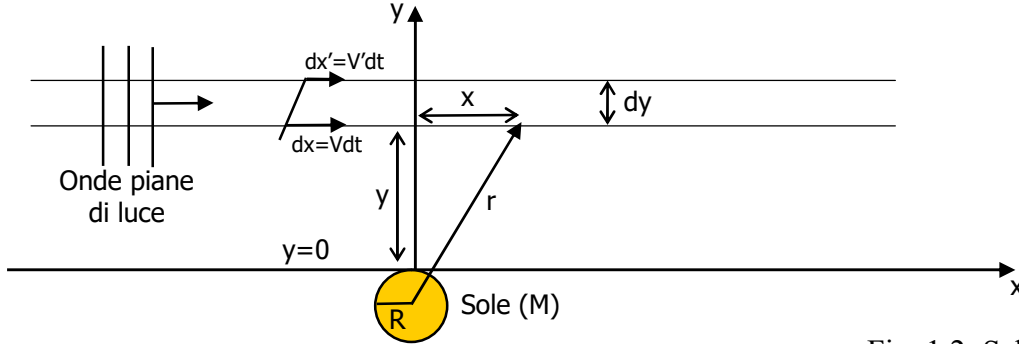


Fig. 1.2: Schema per i calcoli.

Ora, con riferimento invece alla Figura 1.2, si ha:

$$r^2 = (y + R)^2 + x^2 \text{ (eq. di un cerchio);} \quad (1.4)$$

applichiamo ora l'operatore $\partial/\partial y$ alla (1.4), ottenendo:

$$2r(\partial r/\partial y) = 2(y + R) \text{ da cui: } \partial r/\partial y = (y + R)/r \text{ e sulla superficie della massa M: } \partial r/\partial y|_{y \rightarrow 0} = R/r.$$

$$\text{Ora: } \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} \left(c \left[1 - \frac{2GM}{rc^2} \right] \right) = \frac{2GM}{r^2 c} \frac{\partial r}{\partial y}, \text{ da cui:}$$

$$\left. \frac{\partial V}{\partial y} \right|_{y \rightarrow 0} = \frac{2GM}{r^2 c} \left. \frac{\partial r}{\partial y} \right|_{y \rightarrow 0} = \frac{2GM}{r^2 c} \frac{R}{r} = \frac{2GMR}{r^3 c}.$$

Calcoliamo ora la differenza tra i cammini dx e dx' dei fronti d'onda a distanza verticale y ed $y+dy$, alle quali la luce ha velocità rispettivamente pari a V e V' :

$dx' = V'dt$ e $dx = Vdt$, da cui:

$$dx' - dx = V'dt - Vdt = dt(V' - V); \quad (1.5)$$

inoltre, si ha, per Taylor: $V' = V + (\partial V/\partial y)dy$, ossia: $V' - V = (\partial V/\partial y)dy$ e la (1.5) diventa:

$$dx' - dx = (\partial V/\partial y)dydt \quad (1.6)$$

Poi, sempre dalla Figura 1.2 e dalla (1.6), si ha: $d\alpha = (dx' - dx)/dy = (\partial V/\partial y)dt = (\partial V/\partial y)dx/V$.

La deflessione totale $\Delta\alpha$ subita tra $-\infty$ e $+\infty$ è, considerando che, in tale range, V è quasi sempre uguale a c (tranne che appena in prossimità di M):

$$\Delta\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{c} (\partial V/\partial y)dx \cong \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} (\partial V/\partial y)dx \text{ e, in prossimità della superficie di M (y=0):}$$

$$\Delta\alpha = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2GMR}{r^3 c} dx = \frac{2GMR}{c^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(R^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{2GMR}{c^2} \left[\frac{x}{R^2(R^2 + x^2)^{1/2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{2GMR}{c^2} \cdot \frac{2}{R^2}, \text{ cioè:}$$

$$\Delta\alpha = \frac{4GM}{Rc^2} = 1,75'' \quad !!! \quad (1.7)$$

2 – SECONDO METODO (BASATO SULLA LEGGE DI SNELL):

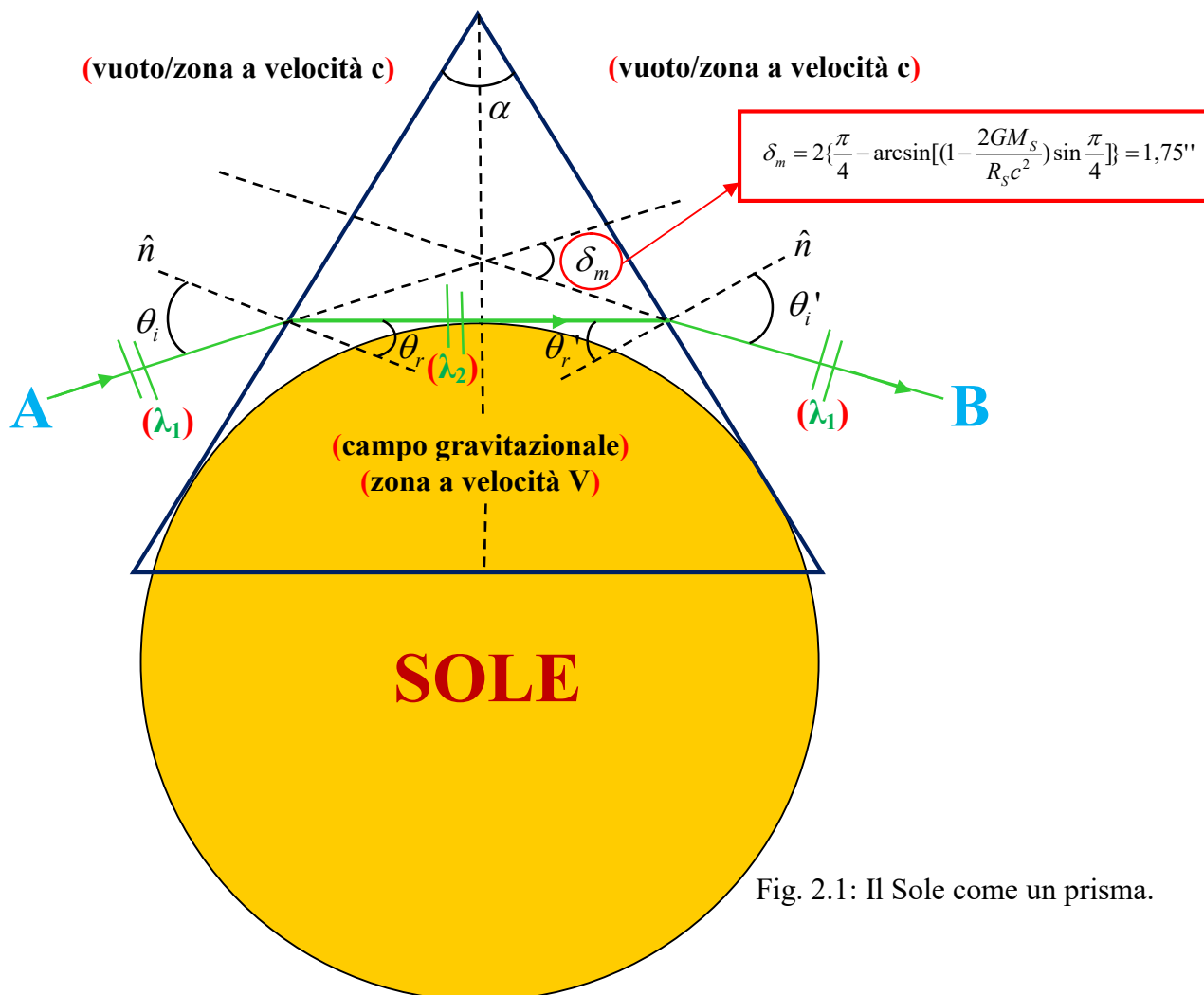


Fig. 2.1: Il Sole come un prisma.

Ovviamente, nella Fig. 2.1 qui sopra, il prisma può essere abbassato in modo da avere il tratto di raggio luminoso orizzontale (λ_2) sufficientemente corto. Ed il prisma può ovviamente essere ruotato intorno al centro dell'astro e riapplicato, per ragioni di simmetria.

Proprio come, nel fenomeno della rifrazione della luce, il raggio di luce piega entrando nell'acqua (SNELL-Rif. Fig. A3.1 in Appendice 3), così la luce che entra nel campo gravitazionale dell'astro viene deflessa. Ed altresì, così come in aria ed acqua la luce ha velocità diverse, anche nel caso del Sole si parlerà di c lontano da esso e di V in sua vicinanza.

Il metodo di calcolo tradizionale della deflessione della luce da parte del Sole fornisce il valore:

$$\Delta\varphi = \frac{4GM_s}{R_s c^2} = 0,849 \cdot 10^{-5} \text{ rad} = 1,75'' , \quad (2.1)$$

valore ottenuto, ad esempio, in Brasile durante l'eclissi del 1919.

($R_s = 6,95475 \cdot 10^8 \text{ m}$, $M_s = 1,9891 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ e $c = 2,99792458 \cdot 10^8 \text{ m/s}$)

Facciamo ora appunto leva sulla variazione di velocità che la luce subisce quando si approssima ad una massa.

Con riferimento alla Fig. 2.1 qui sopra, ricordiamo innanzitutto la (A3.6) in Appendice 3, che è comunque anche abbastanza intuitiva, sebbene sia là dimostrata ufficialmente:

$$\delta_m = 2(\theta_i - \theta_r) = \Delta\varphi \quad (2.2)$$

δ_m è ovviamente l'angolo della deflessione subita dal raggio di luce che, provenendo da **A**, abbandona poi definitivamente il sistema prisma (rifrattivo), dirigendosi verso **B**, ed è altresì là dimostrato che $\delta = \delta_m$ è minimo quando θ_i è tale che il raggio interno al prisma è parallelo alla base e in tal caso si ha anche che $\theta_i = \theta_i'$ e $\theta_r = \theta_r'$, nonché anche la (2.2) (ossia la (A3.6)) appunto. Ricordiamo poi la definizione di redshift:

$$z = \frac{\lambda_{osservata} - \lambda_{emessa}}{\lambda_{emessa}} \quad (2.3)$$

Inoltre, segue che: $1 + z = \frac{\lambda_{osservata}}{\lambda_{emessa}}$. $z > 0$ è redshift; $z < 0$ è blueshift. Dalla (2.3) si ottiene:

$$z = \frac{\lambda_{osservata} - \lambda_{emessa}}{\lambda_{emessa}} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1 = \frac{-\Delta\lambda}{\lambda_1} = \frac{V/f - c/f}{c/f} = \frac{-\Delta v}{c} = \frac{V}{c} - 1 \quad (2.4)$$

(ovviamente, alla sinistra del prisma, con λ_1 che è in zona **A**(sorgente) e λ_2 che è osservata dal prisma) e confrontando poi quest'ultima (la (2.4) appunto) con la (1.3) (che scaturisce dalla Soluzione di Schwarzschild), ossia la: $V \cong c[1 - \frac{2GM_S}{R_S c^2}]$ ($\rightarrow \frac{V}{c} \cong [1 - \frac{2GM_S}{R_S c^2}]$), si ha che:

$$z = -\frac{2GM_S}{R_S c^2} = \frac{-\Delta\lambda}{\lambda_1} \quad (2.5)$$

Allora, per la Legge di Snell (A3.3), si ha: $\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_r} = \frac{c}{V} = n$, ma dalla (2.4) si ha che:

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1 = \frac{V}{c} - 1, \text{ da cui: } \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{V}{c} \rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{c}{V} \rightarrow \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_r} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \text{ e allora:}$$

$$\sin \theta_r = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \sin \theta_i = \frac{(\lambda_1 - \Delta\lambda)}{\lambda_1} \sin \theta_i = (1 - \frac{\Delta\lambda}{\lambda_1}) \sin \theta_i \text{ e per la (2.5), si ha poi:}$$

$$\sin \theta_r = (1 - \frac{\Delta\lambda}{\lambda_1}) \sin \theta_i = (1 - \frac{2GM_S}{R_S c^2}) \sin \theta_i \text{ ed infine:}$$

$$\theta_r = \arcsin[(1 - \frac{2GM_S}{R_S c^2}) \sin \theta_i] \quad (2.6)$$

e la (2.6) nella (2.2) fornisce:

$$\delta_m = 2\{\theta_i - \arcsin[(1 - \frac{2GM_S}{R_S c^2}) \sin \theta_i]\} \quad (2.7)$$

Per finire, osservando la Fig. 2.2 qui sotto, si nota che l'angolo θ_i può variare tra 0° (ossia col raggio di luce perfettamente perpendicolare alla superficie sinistra del prisma) a 90° (ossia quando, al massimo, il raggio di luce diventa quasi parallelo alla superficie sinistra del prisma), ed allora noi useremo per θ_i il suo valore medio, ossia $\bar{\theta}_i = \frac{0^\circ + 90^\circ}{2} = 45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$, da cui, per la (2.7):

$$\delta_m = 2\{\frac{\pi}{4} - \arcsin[(1 - \frac{2GM_S}{R_S c^2}) \sin \frac{\pi}{4}]\} = 0,849 \cdot 10^{-5} \text{ rad} = 1,75'' \quad !!! \quad (2.8)$$

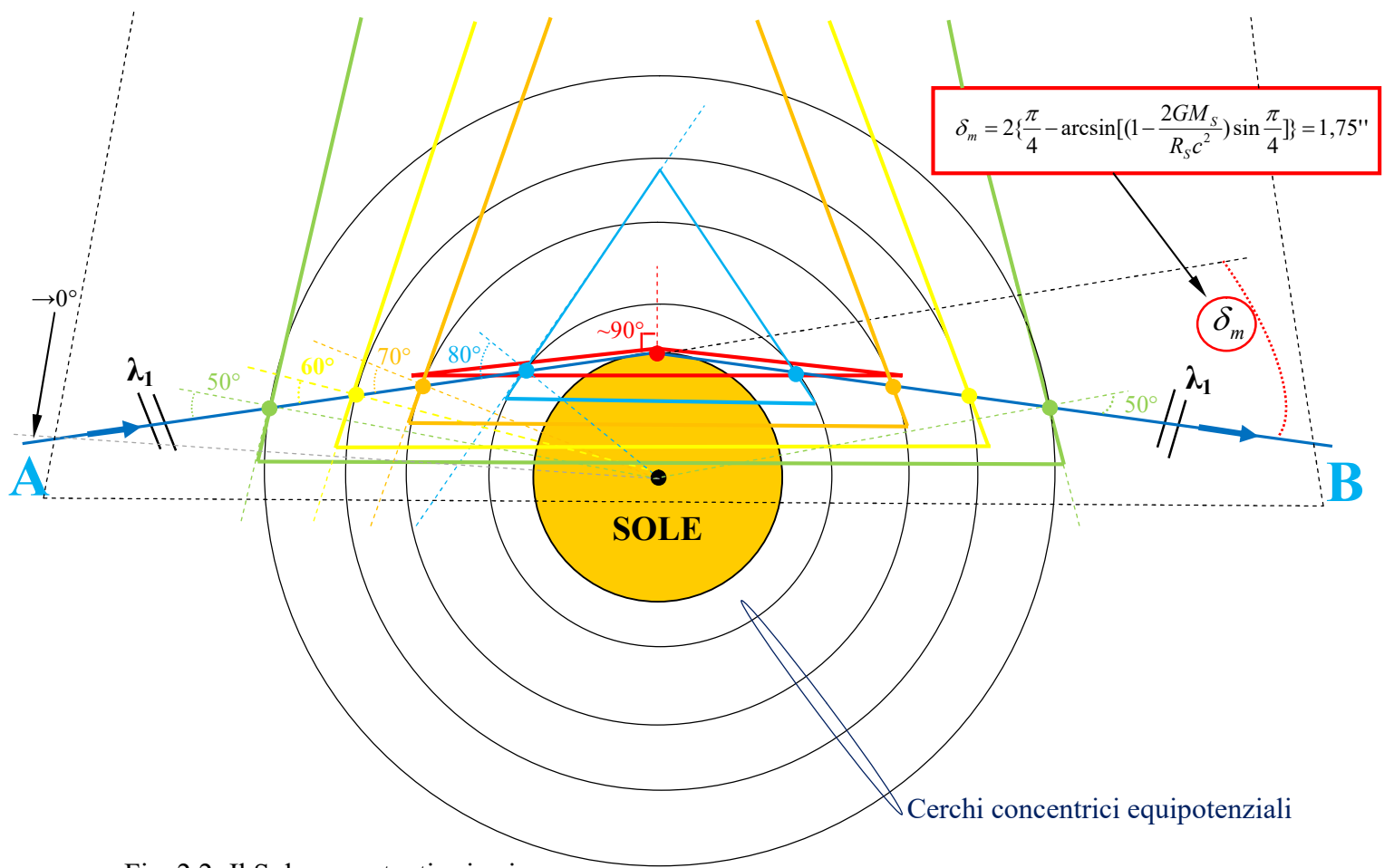


Fig. 2.2: Il Sole come tanti prismi.

3 – TERZO METODO (METODO TRADIZIONALE):

-Le equazioni generali del moto.

Conosciamo dunque la Soluzione di Schwarzschild:

$d\tau^2 = B(r)dt^2 - A(r)dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ (vedere Appendice 1) e teniamo

inoltre conto della equazione della geodetica (vedere Appendice 2): $\frac{d^2 x^\mu}{dp^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu}{dp} \frac{dx^\lambda}{dp} = 0$ (in p

generico, per ora): si ha allora, facendo variare μ : ($\Gamma_{\nu\lambda}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} (\frac{\partial g_{\rho\lambda}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\rho})$)

$$0 = \frac{d^2 r}{dp^2} + \frac{A'(r)}{2A(r)} \left(\frac{dr}{dp}\right)^2 - \frac{r}{A(r)} \left(\frac{d\theta}{dp}\right)^2 - \frac{r \sin^2 \theta}{A(r)} \left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 + \frac{B'(r)}{2A(r)} \left(\frac{dt}{dp}\right)^2 \quad (3.1)$$

$$0 = \frac{d^2 \theta}{dp^2} + \frac{2}{r} \frac{d\theta}{dp} \frac{dr}{dp} - \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 \quad (3.2)$$

$$0 = \frac{d^2 \varphi}{dp^2} + \frac{2}{r} \frac{d\varphi}{dp} \frac{dr}{dp} + 2 \cot \theta \frac{d\varphi}{dp} \frac{d\theta}{dp} \quad (3.3)$$

$$0 = \frac{d^2 t}{dp^2} + \frac{B'(r)}{B(r)} \frac{dt}{dp} \frac{dr}{dp} \quad (3.4)$$

Ora, siccome il campo è isotropico, poniamo $\theta = \pi/2$ e dunque le ultime due, (3.3) e (3.4) diventano:

$$\frac{d}{dp} \left[\ln \frac{d\varphi}{dp} + \ln r^2 \right] = 0 \quad \text{e} \quad \frac{d}{dp} \left[\ln \frac{dt}{dp} + \ln B \right] = 0, \text{ da cui:}$$

$$r^2 \frac{d\varphi}{dp} = J \quad (\text{costante}) \quad (3.5)$$

$$\frac{dt}{dp} B = \text{const} \quad (=1, \text{ per scelta}) \quad (3.6)$$

da cui: $\frac{dt}{dp} = \frac{1}{B}$. Inserendo ora le (3.5), (3.6) e la condizione ($\theta = \pi/2$) usata prima, nella (3.1), si

$$\text{ha: } 0 = \frac{d^2 r}{dp^2} + \frac{A'(r)}{2A(r)} \left(\frac{dr}{dp}\right)^2 - \frac{J^2}{r^3 A(r)} + \frac{B'(r)}{2A(r)B^2(r)} \quad \text{e moltiplicando ora per } 2A(r) \frac{dr}{dp} :$$

$$\frac{d}{dp} \left[A(r) \left(\frac{dr}{dp}\right)^2 + \frac{J^2}{r^2} - \frac{1}{B(r)} \right] = 0 \quad \text{cioè:}$$

$$A(r) \left(\frac{dr}{dp}\right)^2 + \frac{J^2}{r^2} - \frac{1}{B(r)} = -E \quad (\text{costante}) \quad (3.7)$$

Facendo poi sistema tra la condizione ($\theta = \pi/2$) usata prima, la (3.5), (3.6) e (3.7), si ottiene:

$$d\tau^2 = E dp^2 \quad (3.8)$$

Sappiamo che $E=0$ per i fotoni e $E>0$ per particelle materiali.

Siccome $A(r)$ è sempre positivo, si ha che la particella può raggiungere r solo se (vedere la (3.7)):

$$\frac{J^2}{r^2} + E \leq -\frac{1}{B(r)}. \quad \text{Usando poi la (3.6) nelle (3.5), (3.7) e (3.8), si ottiene:}$$

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = JB(r) \quad (3.9)$$

$$\frac{A(r)}{B^2(r)} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{J^2}{r^2} - \frac{1}{B(r)} = -E \quad (3.10)$$

$$\text{e } d\tau^2 = EB^2(r)dt^2 \quad (3.11)$$

Sappiamo ora che, per campi deboli: $B - 1 = 2\phi \rightarrow r^2 \frac{d\phi}{dt} = J$ e

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{J^2}{2r^2} + \phi \cong \frac{1-E}{2} \quad (3.12)$$

in quanto: $-\frac{1}{B(r)} = -\frac{1}{1+2\phi} \cong (\text{per Taylor}) \cong -(1-2\phi)$

La (3.12) ha una analoga nella meccanica classica di Newton.

Per orbite generali, $r=r(\phi)$; sappiamo poi che:

$$\begin{cases} r^2 \frac{d\phi}{dp} = J \\ A(r) \left(\frac{dr}{dp} \right)^2 + \frac{J^2}{r^2} - \frac{1}{B(r)} = -E \end{cases}$$

eliminando dp, si ha: $\frac{A(r)}{r^4} \left(\frac{dr}{d\phi} \right)^2 + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{J^2 B(r)} = -\frac{E}{J^2}$, (3.13)

con soluzione:

$$\phi = \pm \int \frac{A^{1/2}(r) dr}{r^2 \left(\frac{1}{J^2 B(r)} - \frac{E}{J^2} - \frac{1}{r^2} \right)^{1/2}} \quad (3.14)$$

-La deflessione della luce da parte del Sole.

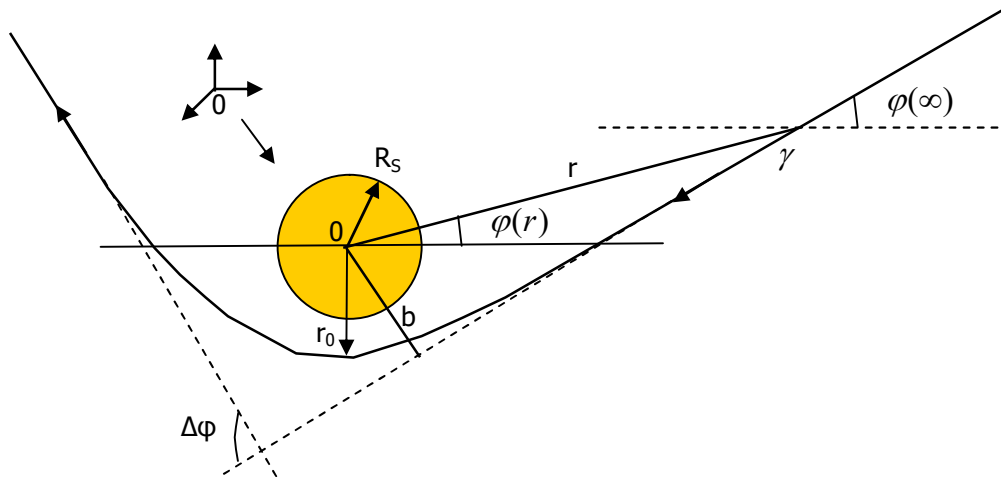


Fig. 3.1: La deflessione della luce da parte del Sole.

$R_S = R_{delSole}$; b è il parametro d'urto. All'infinito, $b = r \sin(\phi - \phi_\infty) \cong r(\phi - \phi_\infty)$ e:

$-V = \frac{d}{dt} r \cos(\phi - \phi_\infty) \cong \frac{dr}{dt}$; V è la velocità di moto (costante). Essendo all'infinito $A=B=1$,

inserendo queste due relazioni nelle (3.9) e (3.10), si ha:

$$J = bV \text{ ed} \quad (3.15)$$

$$E = 1 - V^2 \quad (3.16)$$

La (3.16) è banale; per ottenere invece la (3.15), osserviamo che:

$b \cong r(\varphi - \varphi_\infty)$, da cui: $0 = dr(\varphi - \varphi_\infty) + r d\varphi$, da cui: $r^2 \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{dr}{dt}(\varphi - \varphi_\infty)r = bV = J$

Per $r = r_0$ si ha che $dr/d\varphi = 0$ e la (3.13) allora diviene: $J = r_0 \left(\frac{1}{B(r_0)} - 1 + V^2 \right)^{1/2}$ e la (3.14)

diviene, con facili passaggi:

$$\varphi(r) = \varphi(\infty) + \int_r^\infty \frac{A^{1/2}(r) dr}{r^2 \left[\frac{1}{r_0^2} \left(\frac{1}{B(r)} - 1 + V^2 \right) \left(\frac{1}{B(r_0)} - 1 + V^2 \right)^{-1} - \frac{1}{r^2} \right]^{1/2}} \quad (3.17)$$

La variazione totale di φ è: $2|\varphi(r_0) - \varphi_\infty|$, mentre se il raggio di luce procedesse indisturbato, si avrebbe una variazione pari a π , quindi, con riferimento alla Fig. 3.1, si ha: $\Delta\varphi = 2|\varphi(r_0) - \varphi_\infty| - \pi$;

per un fotone, $V^2 = 1$ e la (3.17) fornisce: $\varphi(r) - \varphi(\infty) = \int_r^\infty A^{1/2}(r) \left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \left(\frac{B(r_0)}{B(r)} \right) - 1 \right]^{-\frac{1}{2}} \frac{dr}{r}$ (3.18)

Usando ora gli sviluppi (di Taylor) dovuti a Robertson già introdotti in Appendice 1 (qui in convenzione $c=1$): $A(r) = 1 + 2\frac{GM}{r} + \dots$, $B(r) = 1 - 2\frac{GM}{r} + \dots$, si ha:

$$\begin{aligned} \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \left(\frac{B(r_0)}{B(r)} \right) - 1 &= \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \left[\frac{1 - 2\frac{GM}{r_0} + \dots}{1 - 2\frac{GM}{r} + \dots} \right] - 1 = \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \left[1 + 2GM \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) + \dots \right] - 1 \cong \\ &\cong \left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^2 + \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 2GM \frac{(r_0 - r)}{rr_0} - 1 \right] = \left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^2 - 1 \right] \left[1 - \frac{2GMr}{r_0(r + r_0)} + \dots \right] \end{aligned}$$

L'ultima eguaglianza è verificabile direttamente. La (3.18) diviene, per Taylor:

(per la risoluzione dei primi due integrali, si ponga $\frac{r_0}{r} = \cos x$, mentre per il terzo si porrà $\frac{r_0}{r} = t$ e

l'integrale sarà $\frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t}}$)

1° Int.	2° Int.	3° Int.
------------	------------	------------

$$\varphi(r) - \varphi(\infty) = \int_r^\infty \frac{1}{r} \left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^2 - 1 \right]^{-\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{GM}{r} + \frac{GMr}{r_0(r + r_0)} + \dots \right] dr$$

(i tre termini nel riquadro giallo scaturiscono dal prodotto tra $A^{1/2}(r) = 1 + \frac{GM}{r} + \dots$ e:

$\left[1 - \frac{2GMr}{r_0(r + r_0)} + \dots \right]^{-1/2} \cong \left[1 + \frac{GMr}{r_0(r + r_0)} + \dots \right]$, ed è stato trascurato il quarto, in quanto molto minore degli altri, poiché

va ricordato che siamo in convenzione $c=1$ ed ai denominatori ci sarebbero dei c^2 ed il quarto termine trascurato avrebbe avuto al suo denominatore addirittura un c^4)

ossia: $\varphi(r) - \varphi(\infty) = \sin^{-1} \left(\frac{r_0}{r} \right) + \frac{GM}{r_0} \left[1 + 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{r_0}{r} \right)^2} - \sqrt{\frac{r - r_0}{r + r_0}} \right] + \dots$ e dunque:

$\Delta\varphi = \frac{4GM}{r_0}$ e ricordando la nostra normalizzazione ($c=1$), si ha infine: $\Delta\varphi = \frac{4GM}{r_0 c^2}$; con

$r_0 = R_s = 6,95 \cdot 10^8 m$ e $M_s = 1,97 \cdot 10^{30} kg$, si ha: $\Delta\varphi = 1,75''$, in ottimo accordo con i dati sperimentali. In realtà, quando nel 1919 fu effettuata una spedizione in Brasile per la misura di tale deflessione della luce delle stelle da parte del Sole, in occasione di una eclissi, la precisione della misura era dello stesso ordine di grandezza del risultato.

APPENDICI

APPENDICE 1: LA SOLUZIONE DI SCHWARZSCHILD:

-La gravità rallenta il tempo

Anche la gravità rallenta il tempo! In montagna il tempo scorre più velocemente che a valle. Ovviamente, sulla Terra, la differenza è impercettibile, ma su una stella di neutroni, o in un buco nero, l'effetto è intensissimo.

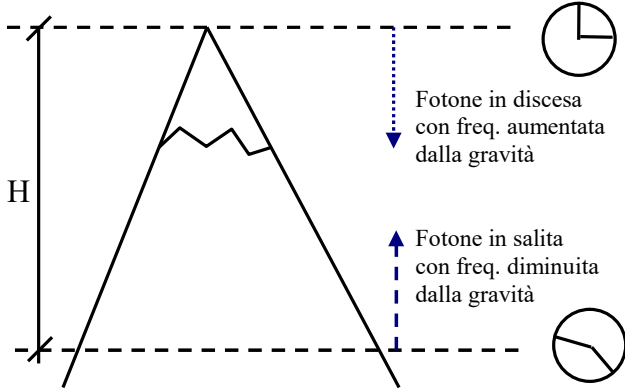


Fig. A1.1: Montagna, gravità e tempo.

$\Delta E = m_0 g H$ (delta energia del salto di quota); $\Delta E = h \Delta \nu$ (delta energia del calo di frequenza di un fotone). Dalle due: $\Delta \nu = m_0 g H / h$. Per un fotone, $E = h \nu$, ma in relatività si ha che: $E = m_0 c^2$, da cui, per un fotone: $m_0 = h \nu / c^2$ e dunque, per $\Delta \nu$: $\Delta \nu = \nu g H / c^2$ ed essendo il tempo l'inverso della frequenza, si ha: $\Delta \nu / \nu = \Delta t / t$ e dunque: $\Delta t = \frac{g H}{c^2} t$. (A1.1)

Dunque, su un tempo t , si ha un rallentamento Δt dato dalla gravità! Sappiamo che la velocità di fuga di un corpo celeste di massa M e raggio R vale: $V = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$. Se su quel corpo un oggetto viene lanciato verticalmente alla velocità di fuga, esso uscirà dal campo gravitazionale del corpo celeste ed andrà verso l'infinito, senza più ricadere. Un buco nero è un corpo così compresso (M grande ed R piccolo) che la velocità di fuga sulla sua superficie raggiunge il valore della velocità della luce e dunque neanche la luce vi sfugge, da cui il nome di buco nero; inoltre, per quanto detto sopra, si può affermare che in un buco nero il tempo è pressoché fermo!

Tornando al rallentamento, per la (A1.1): $\Delta t = \frac{g H}{c^2} t$, che può essere interpretata come: $dt = \frac{g dr}{c^2} t$ e

considerando che $|g| = \frac{GM}{r^2}$, segue che: $dt = t \frac{GM}{c^2 r^2} dr$, ossia: $\frac{dt}{t} = \frac{GM}{c^2} \frac{dr}{r^2} \rightarrow \int \frac{dt}{t} = \frac{GM}{c^2} \int \frac{dr}{r^2} \rightarrow$

$$\rightarrow \ln t = -\frac{GM}{c^2 r} + k \rightarrow, \quad t = k \cdot e^{-\frac{GM}{c^2 r}} \rightarrow (e^{-x} \approx 1 - x) \rightarrow t = k(1 - \frac{GM}{c^2 r}) \rightarrow$$

$$(t = t_0 \gg r = \infty) \rightarrow t = t_0(1 - \frac{GM}{c^2 r}) \rightarrow (\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{1}{2}x) \rightarrow$$

$$\rightarrow t = t_0 \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}. \quad (A1.2)$$

D'altra parte, sappiamo che la formula per la contrazione di Lorentz ha la stessa forma della formula per la dilatazione del tempo, ma con la radice al denominatore, dunque:

$$r = r_0 / \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}. \quad (A1.3)$$

-La soluzione di Schwarzschild

Sappiamo che, in generale: $d\tau^2 = c^2(dt)^2 - (d\vec{x})^2$ (invariante quadridimensionale) ed essendo, per un fotone (che ha velocità c): $(d\vec{x})^2 = c^2(dt)^2$, segue che: $d\tau^2 = 0$ (per un fotone appunto).

Sempre dal tensore metrico: $d\tau^2 = c^2 dt^2 - dr^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)$, passiamo alle più semplici coordinate sferiche:

$$d\tau^2 = c^2 dt^2 - (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2); \quad (A1.4)$$

ma per le (A1.2) e (A1.3):

$$dt = dt_0 \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} \rightarrow dt^2 = dt_0^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) = dt_0^2 \underline{B(r)} \text{ e:}$$

$$dr^2 = dr_0^2 / \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \cong dr_0^2 \left(1 + \frac{2GM}{c^2 r}\right) = dr_0^2 \underline{A(r)}, \text{ poiché, per Taylor: } 1/(1-x) \cong (1+x). \text{ Inoltre,}$$

non si ha contrazione di Lorentz sulle direzioni trasversali (ad esempio, y e z , oppure anche θ e φ), da cui, per la (A1.4):

$$d\tau^2 = B(r)c^2 dt^2 - A(r)dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (A1.5)$$

(e dopo aver ribattezzato r e t) che è la Soluzione di Schwarzschild.

Applicandola al fotone:

$$0 = B(r)c^2 dt^2 - A(r)dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2; \text{ inoltre, considerando luce che viaggia } \underline{\text{radialmente}} \text{ verso il Sole, possiamo annullare le componenti in } d\theta \text{ e } d\varphi: 0 = B(r)c^2 dt^2 - A(r)dr^2; \quad (A1.6)$$

la velocità della luce è $c = dr/dt$ lontano dalla massa del Sole, mentre in prossimità dello stesso vale la (A1.6), dalla quale si ricava che: $V = dr/dt = c(B(r)/A(r))^{1/2} \neq c$; (A1.7)

essendo quindi: $B(r) = [1 - \frac{2GM}{rc^2}]$ e $A(r) = [1 - \frac{2GM}{rc^2}]^{-1} \cong [1 + \frac{2GM}{rc^2}]$, allora dagli sviluppi in serie

sulla variabile $\frac{2GM}{rc^2}$ applicati alla (A1.7), si ha banalmente che:

$$V/c = ([1 - \frac{2GM}{rc^2}]) / ([1 + \frac{2GM}{rc^2}])^{1/2} \cong [1 - \frac{2GM}{2rc^2}] [1 - \frac{2GM}{2rc^2}] \cong [1 - \frac{2GM}{rc^2}], \text{ ossia:}$$

$$V \cong c[1 - \frac{2GM}{rc^2}] \quad (A1.8)$$

APPENDICE 2: La geodetica:

Un paracadutista in caduta libera non ha un pavimento su cui il suo corpo può gravare, dunque lui, tra sé e sé, non avverte accelerazione di gravità, e si sente come sospeso nel vuoto e si accorge che sta cadendo solo se guarda gli altri oggetti attorno che si muovono. Per una particella in caduta libera, dunque, vi è ovviamente un sistema di riferimento in cui $\vec{a} = 0$, ossia:

$$\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial \tau^2} = 0 \quad (\text{caduta libera in coordinate euclidee}) \quad (A2.1)$$

con $d\tau^2 = -\eta_{ik} d\xi^i d\xi^k$. Possiamo però vedere la (A2.1) nel seguente modo:

$$\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial \tau^2} = 0 = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}. \text{ Moltiplichiamo ora entrambi i membri}$$

per $\frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}$ e teniamo conto del fatto che: $\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} = \delta_\mu^\lambda$; si avrà:

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad (\text{caduta libera in coordinate curvilinee}) \quad (A2.2)$$

(equazione della geodetica, dove geodetica, qui sulla Terra, è la rotta minima tra una località e l'altra)

APPENDICE 3: LA RIFRAZIONE E LA LEGGE DI SNELL:

-Rifrazione

-Il bagnino

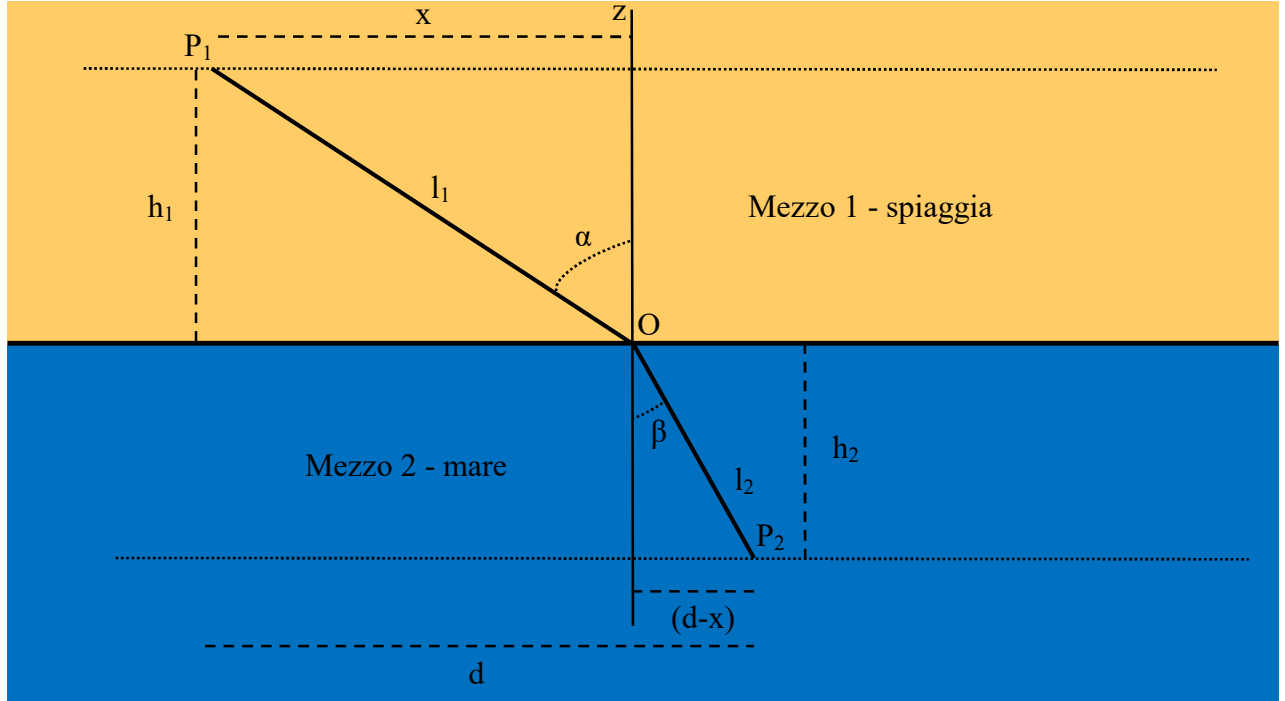


Fig. A3.1: Il bagnino in P_1 vede il bagnante in difficoltà in P_2 .

Il bagnino in P_1 deve raggiungere e soccorrere il bagnante in P_2 ; egli, però, sa anche che la corsa sulla spiaggia avviene a velocità v_1 maggiore della velocità v_2 del nuoto in acqua, dunque il percorso geometricamente più breve, dato dal segmento P_1 - P_2 non è il più veloce, perché fa stare il bagnino troppo in acqua, dove è più lento.

Valutiamo il tempo di percorrenza del viaggio del bagnino:

$$t_B = \frac{P_1 - O}{v_1} + \frac{O - P_2}{v_2} = \frac{l_1}{v_1} + \frac{l_2}{v_2} = \frac{\sqrt{h_1^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{h_2^2 + (d-x)^2}}{v_2}$$

Ora, per valutare il minimo di t_B , calcoliamo la derivata ed annulliamola:

$$\frac{dt_B}{dx} = \frac{2x}{v_1 \sqrt{h_1^2 + x^2}} - \frac{2(d-x)}{v_2 \sqrt{h_2^2 + (d-x)^2}} = 0, \text{ ma si ha che:}$$

$$\frac{x}{\sqrt{h_1^2 + x^2}} = \sin \alpha \quad \text{e} \quad \frac{(d-x)}{\sqrt{h_2^2 + (d-x)^2}} = \sin \beta, \text{ da cui: } \frac{dt_B}{dx} = \frac{2 \sin \alpha}{v_1} - \frac{2 \sin \beta}{v_2} = 0, \text{ ossia:}$$

$$\frac{v_1}{\sin \alpha} = \frac{v_2}{\sin \beta} = k, \quad (\text{A3.1})$$

dunque, in entrambi gli strati (mezzo 1 e mezzo 2), il rapporto tra il seno dell'angolo con la verticale e la velocità è costante.

-Legge di Snell

Se i percorsi l_1 ed l_2 fossero dei raggi di luce ed i mezzi 1 e 2 fossero, ad esempio, aria ed acqua, considerando che, per gli indici di rifrazione n_1 ed n_2 si ha, per definizione:

$$n_1 = \frac{c}{v_1} \quad \text{e} \quad n_2 = \frac{c}{v_2}, \quad (\text{A3.2})$$

si ottiene la Legge di Snell:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{v_1/c}{v_2/c} = \frac{c/v_2}{c/v_1} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21} = n, \quad (\text{A3.3})$$

che è la responsabile del fatto che una scala semi immersa in una piscina la vediamo piegata. n_{21} è l'indice di rifrazione relativo del mezzo 2 rispetto al mezzo 1. Visto che $v_1 \neq v_2$, ossia: $v_i \neq v_r$ ("i" denota la radiazione incidente, mentre "r" denota quella rifratta) e $v_i = \lambda_i f_i$, $v_r = \lambda_r f_r \rightarrow$

$$\lambda_i = \frac{v_i}{f_i} = \frac{c/n_1}{\omega_i/2\pi} = \frac{c}{n_1} \frac{2\pi}{\omega_i} \quad \text{e} \quad \lambda_r = \frac{v_r}{f_r} = \frac{c/n_2}{\omega_r/2\pi} = \frac{c}{n_2} \frac{2\pi}{\omega_r};$$

$$\text{se, come vedremo, siamo nel caso di } f_1=f_2 \rightarrow \omega_1=\omega_2=\omega=(2\pi)f \rightarrow \lambda_r = \frac{c}{n_2} \frac{2\pi}{\omega} = \frac{c}{n_2} \frac{\lambda_i n_1}{c} = \frac{n_1}{n_2} \lambda_i = n_{12} \lambda_i, \text{ ossia:}$$

$$\lambda_r = \frac{n_1}{n_2} \lambda_i = n_{12} \lambda_i \quad (\text{A3.4})$$

Essendo che la Legge di Snell è qui scaturita anche come calcolo del tempo di percorrenza minimo, viene confermato il Principio di Fermat, secondo cui il raggio di luce segue il cammino più breve.

Trattandosi ora di onde elettromagnetiche (E e B), si ha che: ($\vec{k}$ è il vettore d'onda) (onda incidente)

$$\vec{E}_i = E_{oi} \cdot e^{i(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega_i t)} = E_{oi} \cdot e^{i(\frac{2\pi}{\lambda} \vec{k}_i \cdot \vec{r} - 2\pi f_i t)} \quad \text{e} \quad \vec{B}_i = \frac{n_1}{c} \vec{k}_i \times \vec{E}_i$$

(onda rifratta, con un tal sfasamento φ_r)

$$\vec{E}_r = E_{or} \cdot e^{i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega_r t + \varphi_r)} \quad \text{e} \quad \vec{B}_r = \frac{n_2}{c} \vec{k}_r \times \vec{E}_r$$

Essendo poi che $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ (con j come densità di corrente e σ come conducibilità), si ha che se siamo tra mezzi isolanti, oppure tra vuoto e vuoto+campo gravitazionale, allora $\sigma=0$ e $\rightarrow \vec{j} = \sigma \vec{E} = 0$ (e soprattutto nella zona di confine tra i due mezzi) e le Equazioni di Maxwell sono quelle per il vuoto ed esse condurranno all'Equazione delle Onde sia in "i" che in "r", le cui soluzioni sono quelle sopra riportate, sia in "i" che in "r", (in entrambe le zone si deve avere una $\propto e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi)}$) ed allora passando da "i" ad "r" gli argomenti si devono conservare: $(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega_i t) = (\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega_r t + \varphi_r) \rightarrow \varphi_r = 0$, ($\omega_i = \omega_r \rightarrow f_i = f_r$ stessa frequenza) e $\vec{k}_i \cdot \vec{r} = \vec{k}_r \cdot \vec{r}$; in particolare, si ha: $\vec{k}_i \cdot \vec{r} = \vec{k}_r \cdot \vec{r} \rightarrow \rightarrow k_{i-x}x + k_{i-y}y + k_{i-z}z = k_{r-x}x + k_{r-y}y + k_{r-z}z$ e considerando l'asse y come uscente dal foglio, si ha che $k_{i-y}=0$ (considerando il raggio incidente come contenuto nel piano x-z del foglio), da cui: $k_{i-x}x + k_{i-z}z = k_{r-x}x + k_{r-y}y + k_{r-z}z$ e considerando il punto di attraversamento del confine ($z=0$, con z come asse verticale – rif. Fig. A3.1), si ha: $k_{i-x}x = k_{r-x}x + k_{r-y}y \rightarrow k_{r-y} = 0$ e $k_{i-x} = k_{r-x} \rightarrow \rightarrow \frac{2\pi}{\lambda_i} \sin \alpha = \frac{2\pi}{\lambda_r} \sin \beta$ od anche: $\frac{2\pi}{\lambda_i} \sin \theta_i = \frac{2\pi}{\lambda_r} \sin \theta_r \rightarrow \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_r} = \frac{\lambda_i}{\lambda_r} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}$, ossia la riconferma della Legge di Snell.

-Il Prisma

Si abbia un prisma di materiale trasparente, come in Fig. A3.2:

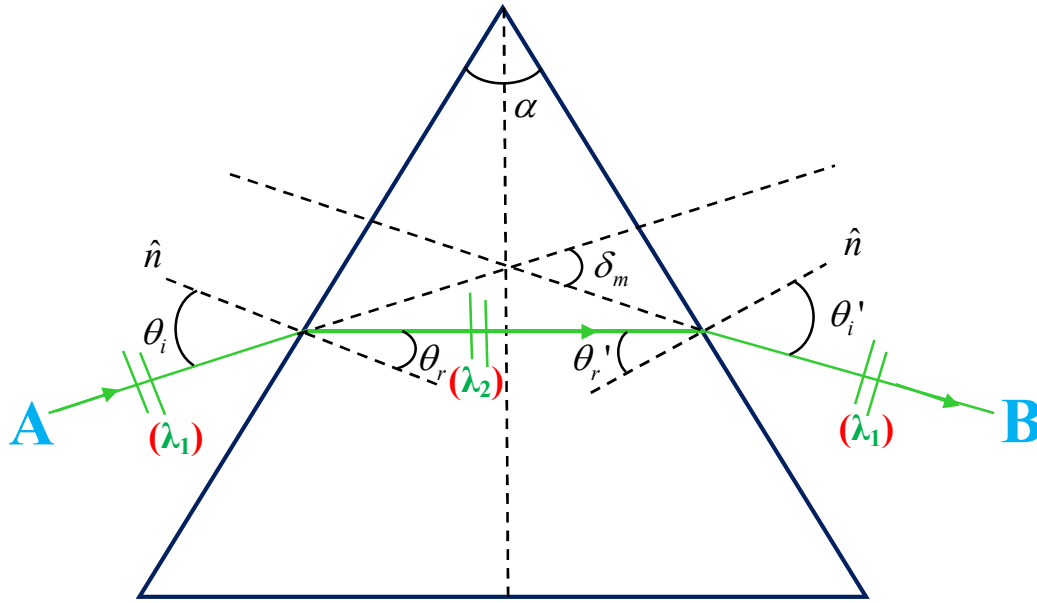


Fig. A3.2: Il prisma.

δ_m è l'angolo della deflessione subita dal raggio di luce che, provenendo da **A**, abbandona poi definitivamente il sistema prisma, dirigendosi verso **B**.

$\delta = \delta_m$ è minimo quando θ_i è tale che il raggio interno al prisma sia parallelo alla base e in tal caso si ha anche che $\theta_i = \theta'_i$ e $\theta_r = \theta'_r$. Mostriamo adesso anche che:

$$\theta_i = \frac{\delta_m + \alpha}{2} \quad \text{e} \quad \theta_r = \frac{\alpha}{2}, \quad (\text{A3.5})$$

da cui:
$$n = \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_r} = \frac{\sin(\frac{\delta_m + \alpha}{2})}{\sin(\frac{\alpha}{2})}; \text{ dimostrazione:}$$

tra parentesi, dalle (A3.5) si ottiene:
$$\theta_i = \frac{\delta_m + \alpha}{2} = \frac{\delta_m + 2\theta_r}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\delta_m = 2(\theta_i - \theta_r)} \quad (\text{A3.6})$$

Tornando alla dimostrazione, con riferimento alla Fig. A3.3 qui sotto, dal triangolo DEB si ha:

$$(\pi - \delta) + (\theta_i - \theta_r) + (\theta'_i - \theta'_r) = \pi, \text{ da cui:}$$

$$\delta = (\theta_i + \theta'_i) - (\theta_r + \theta'_r). \quad (\text{A3.7})$$

Dal triangolo ABD si ha: $\alpha + (\frac{\pi}{2} - \theta_r) + (\frac{\pi}{2} - \theta'_r) = \pi$, da cui:

$$\alpha = (\theta_r + \theta'_r). \quad (\text{A3.8})$$

Dal triangolo BCD si ha: $x + \theta_r + \theta'_r = \pi$, da cui: $x + \alpha = \pi \rightarrow x = (\pi - \alpha)$; la (A3.7) ci dice

$$\text{dunque che } (\theta_i + \theta'_i) = \delta + (\theta_r + \theta'_r) = \delta + \alpha \quad (\text{A3.9})$$

ossia: $\delta = (\theta_i + \theta'_i) - \alpha$ e
$$\frac{d\delta}{d\theta_i} = \frac{d\theta_i}{d\theta_i} + \frac{d\theta'_i}{d\theta_i} = 1 + \frac{d\theta'_i}{d\theta_i} \rightarrow 0 \rightarrow \frac{d\theta'_i}{d\theta_i} = -1 \quad (\text{A3.10})$$


$$\cos\theta_i d\theta_i = n \cos\theta_r d\theta_r \quad \text{e} \quad \cos\theta'_i d\theta'_i = n \cos\theta'_r d\theta'_r, \text{ ma per la (A3.8) si ha:}$$
$$d\theta_r + d\theta'_r = 0 \rightarrow d\theta'_r = -d\theta_r \text{ e quindi:}$$
$$\cos\theta_i d\theta_i = n \cos\theta_r d\theta_r \quad \text{e} \quad \cos\theta'_i d\theta'_i = -n \cos\theta'_r d\theta'_r; \text{ facendo ora il rapporto m.a.m. tra}$$

queste ultime due, si ottiene: $\frac{d\theta'_i}{d\theta_i} = -\frac{\cos\theta'_r}{\cos\theta_r} \frac{\cos\theta_i}{\cos\theta'_i}$, ma sapendo noi già che $\frac{d\theta'_i}{d\theta_i} = -1$ e

$$\theta'_r = \alpha - \theta_r, \text{ otteniamo: } \frac{\cos(\alpha - \theta_r)}{\cos \theta_r} \frac{\cos \theta_i}{\cos \theta'_i} = 1 \rightarrow \theta_i = \theta'_i \text{ (per avere } \frac{\cos \theta_i}{\cos \theta'_i} = 1 \text{) e}$$
$$\theta_r = \frac{\alpha}{2} = \theta'_r \quad (\text{in quanto: } \frac{\cos(\alpha - \theta_r)}{\cos \theta_r} = \frac{\cos(\alpha - \frac{\alpha}{2})}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = 1). \text{ Infine, per la (A3.9), si ha:}$$
$$(\theta_i + \theta'_i) = 2\theta_i = 2\theta'_i = \delta + \alpha, \text{ ossia: } \theta_i = \theta'_i = \frac{(\delta_m + \alpha)}{2} \text{ (e } \theta_r = \theta'_r = \frac{\alpha}{2} \text{)}.$$

Abbiamo scritto δ_m e non semplicemente δ per l'annullamento della derivata della (A3.10).

APPENDICE 4: La Lente Gravitazionale:

Rappresentiamo la situazione tramite una figura:

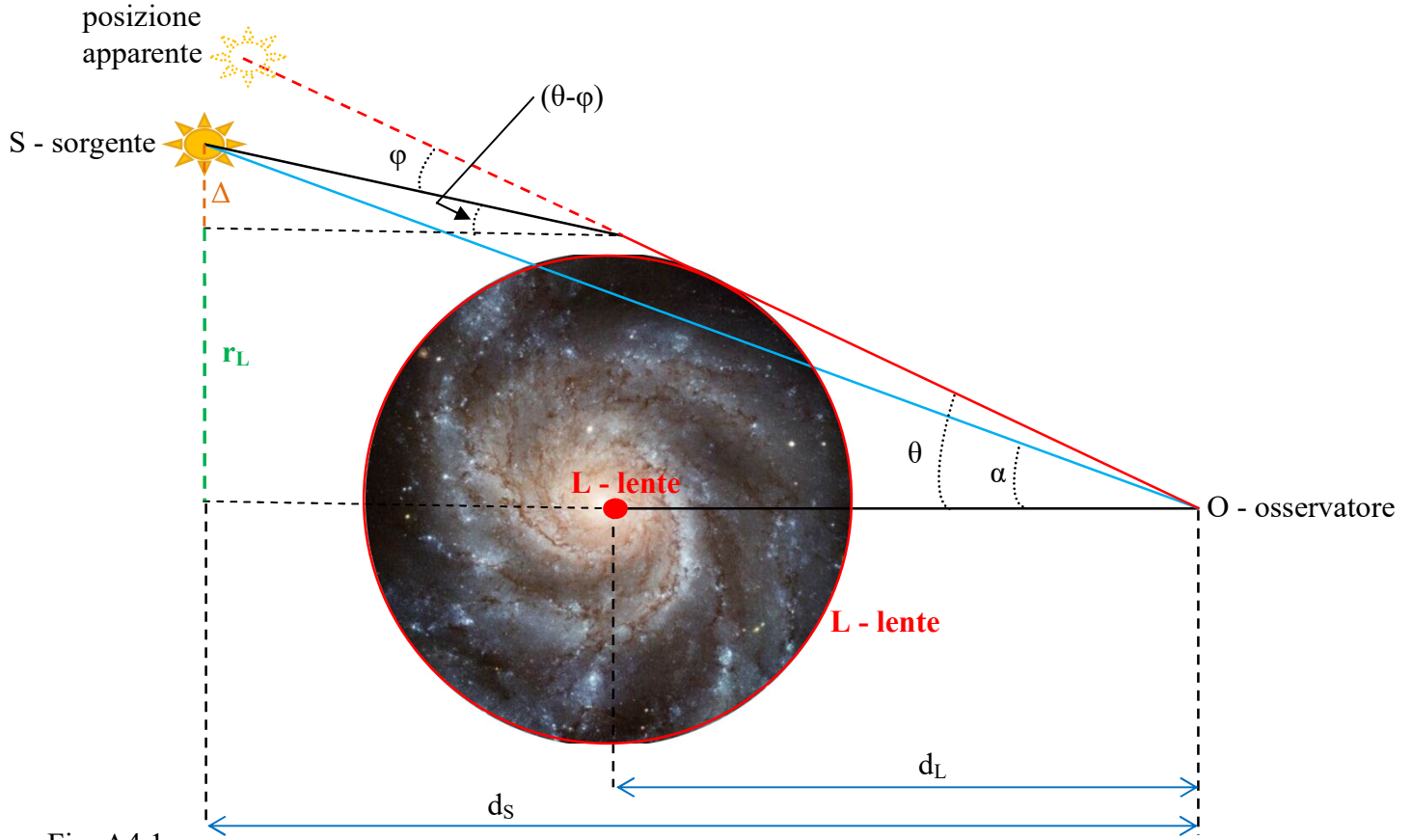
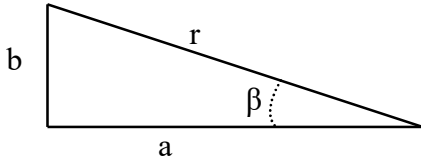


Fig. A4.1



Ricordiamo preliminarmente che si ha, per β piccoli:
 $b = a \tan \beta \cong a\beta \cong r\beta$

Possiamo dunque scrivere che: $r_L = \theta d_L \rightarrow \theta d_L - r_L = 0 \rightarrow \theta d_L - r_L + \theta d_s - \theta d_s = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow \theta d_s - r_L - \theta(d_s - d_L) = 0 \rightarrow \theta d_s r_L - r_L^2 - r_L \theta(d_s - d_L) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \theta d_s r_L - r_L^2 - r_L \theta(d_s - d_L) + r_L \varphi(d_s - d_L) - r_L \varphi(d_s - d_L) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \theta d_s r_L - r_L^2 - r_L(d_s - d_L)(\theta - \varphi) - r_L \varphi(d_s - d_L) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \theta d_s r_L - r_L[r_L + (d_s - d_L)(\theta - \varphi)] - r_L \varphi(d_s - d_L) = 0 \quad (A4.1)$$

Ora, osserviamo che: $\alpha d_s = r_L + \Delta = r_L + (d_s - d_L)(\theta - \varphi)$ (ed $r_L = \theta d_L$), da cui, per la (A4.1):

$$\theta d_s(r_L) - (r_L)[r_L + (d_s - d_L)(\theta - \varphi)] - r_L \varphi(d_s - d_L) = \theta d_s(\theta d_L) - (\theta d_L)[\alpha d_s] - r_L \varphi(d_s - d_L) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \theta^2 d_s d_L - \theta \alpha d_s d_L - r_L \varphi(d_s - d_L) = 0 \rightarrow \theta^2 - \alpha \theta - r_L \varphi \frac{(d_s - d_L)}{d_s d_L} = 0 .$$

Ricordando ora la (1.7) (vedere sopra) per il generico φ ($\varphi = \frac{4GM_L}{r_L c^2}$), si ottiene:

$$\boxed{\theta^2 - \alpha \theta - \frac{4GM_L}{c^2} \frac{(d_s - d_L)}{d_s d_L} = 0} \quad (A4.2)$$

Le soluzioni sono: $\theta_{1,2} = \frac{\alpha}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{\alpha^2 + \frac{16GM_L}{c^2} \frac{(d_S - d_L)}{d_S d_L}}$ e si ha: $\theta_1 + \theta_2 = \alpha$ e:

$$\theta_1 \theta_2 = -\frac{4GM_L}{c^2} \frac{(d_S - d_L)}{d_S d_L}, \text{ da cui:}$$

$$M_L = -\frac{\theta_1 \theta_2 c^2}{4G} \frac{d_S d_L}{(d_S - d_L)} \quad (\text{A4.3})$$

Se, infine, l'oggetto sorgente nascosto è esattamente dietro alla lente e sorgente, lente ed osservatore giacciono dunque tutti e tre sulla stessa linea, allora sarà $\alpha=0$, da cui due soluzioni θ_1 e θ_2 coincidenti (θ_E):

$$\theta_E = \sqrt{\frac{4GM_L}{c^2} \frac{(d_S - d_L)}{d_S d_L}} \quad (\text{A4.4})$$

La sorgente apparirà ad anello, o comunque in più punti, tutta intorno alla lente.

Esempi di lenti gravitazionali:

-Quasar QSO 0957+561 A/B, doppio quasar, con $\theta_1=5,35''=2,59 \times 10^{-5}$ rad e $\theta_2=-0,8''=-3,87 \times 10^{-6}$ rad. La sorgente è un quasar con redshift $z_S=1,413$, mentre la lente (galassia ellittica YGKOW G1) ha uno $z_L=0,355$. Si ha poi: $d_S=9,1 \times 10^{25}$ m = 9,6 mld a.l.; poi: $d_L=3,6 \times 10^{25}$ m = 3,82 mld a.l., sicché, per la (A4.3) otteniamo:

$$M_L = -\frac{\theta_1 \theta_2 c^2}{4G} \frac{d_S d_L}{(d_S - d_L)} = 20,14 \cdot 10^{41} \text{ kg} \cong 10,17 \cdot 10^{11} M_{\text{Sole}} \quad (\text{plausibile!})$$

-Anello di Einstein MG1131+0456 a lunghezze d'onda radio (galassia lente con $z_L=0,844$ e sorgente quasar (che appare doppio) con $z_S=1,849(?)$).

-Anello di Einstein B1938+666 con $z_L=0,881$ e $z_S=2,059$.

-Croce di Einstein Q2237+031 (galassia centrale (a spirale ZW 2237 +030, distante 400 mln di a.l.) come lente ($z_L=0,04$) e quattro immagini (a croce) di quasars (G2237 +0305 - $z_S=1,69$, distanza 8 mld di a.l.) intorno). (C'è chi fa notare che tra una delle 4 immagini e la galassia centrale ci sia un ponte di materia)

-Croce di Einstein J2211+3050 (galassia lente ellittica con $z_L=0,556$ ($M_L=4,5 \times 10^{10} M_{\text{Sole}}$) e sorgente galassia remota, con $z_S=3,03$).

Per ultimo, facciamo un esempio di utilizzo della (1.4) su un anello di Einstein con lente ($z_L=0,5$) a metà strada tra osservatore e sorgente ($d_S=2d_L$) ed $M_L=10^{11} M_{\text{Sole}} \sim 2 \times 10^{41}$ kg : (essendo z_L relativamente piccolo: $d_L \sim v_L/H = cz_L/H = 6,4 \times 10^{25}$ m = 6,8 mld a.l.)

$$(H \cong 72 \text{ km}/(s \cdot \text{Mpc}) \cong 2,338 \cdot 10^{-18} [(\frac{m}{s})/m])$$

$$\theta_E = \sqrt{\frac{4GM_L}{c^2} \frac{(d_S - d_L)}{d_S d_L}} = \sqrt{\frac{2GM_L}{c^2 d_L}} \cong 2,15 \cdot 10^{-6} \text{ rad} = 0,45''$$

-L'Ascensore di Einstein:

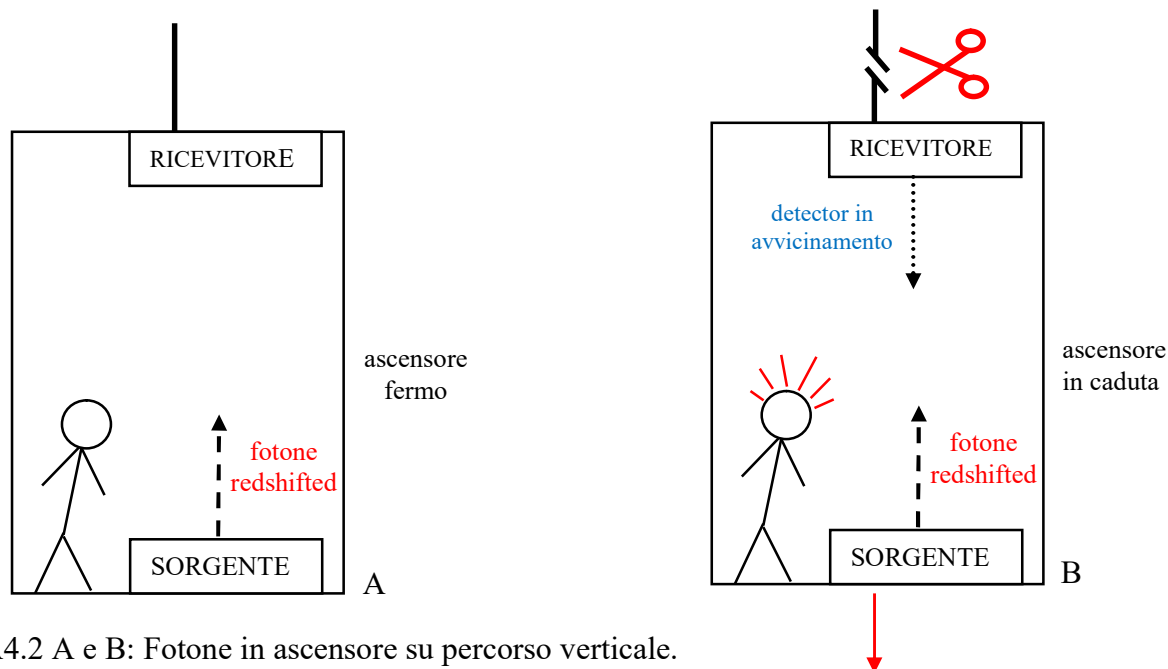


Fig. A4.2 A e B: Fotone in ascensore su percorso verticale.

-Fig. A4.2 A: il fotone fatica a risalire a causa del redshift gravitazionale della Terra.

-Fig. A4.2 B: quando il cavo viene tagliato, l'osservatore sull'ascensore non rileva più la gravità, a causa della caduta libera, dunque il fotone non subisce nessuno shift e lo stesso fenomeno fisico, per principio, dovrebbe constatare l'osservatore sulla Terra; infatti, per quest'ultimo la gravità esiste ancora (redshift), ma contemporaneamente vi è un blueshift di avvicinamento del detector al fotone risalente, con compensazione reciproca.

-Fig. A4.3 A: l'osservatore in ascensore, che è fermo, vede il fotone curvare verso il basso a causa della gravità terrestre. Lo stesso osserva l'osservatore dal suolo terrestre.

-Fig. A4.3 B: il cavo viene tagliato e la caduta libera annulla la gravità agli occhi dell'osservatore in caduta: il fotone va dritto. L'osservatore sul suolo terrestre è in un contesto gravitazionale e vede il fotone che parte da una quota più alta ed approda ad una quota più bassa, dunque esso curva! La gravità deflette la luce! Tuttavia, mentre il fotone curva verso il basso, il detector scende, tanto che anche per l'osservatore a terra il fotone, nel contesto d'insieme ascensore/fotone, in ultima analisi è come se è andato dritto.

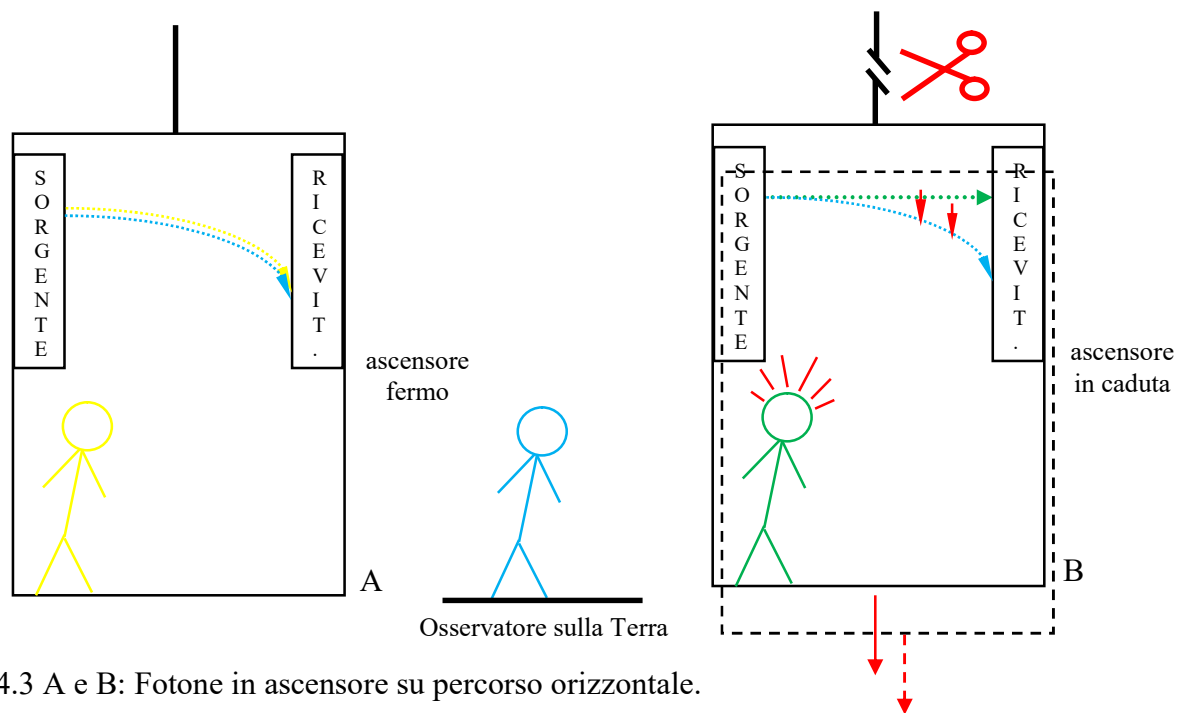


Fig. A4.3 A e B: Fotone in ascensore su percorso orizzontale.