УДК 512.1

Доказательство гипотезы Эндрю Била

Ведерников Сергей Иванович – пенсионер, г. Москва

Аннотация. Методы доказательства Гипотезы Била, использованные в статье, заключаются в возможности показать базовое уравнение в виде равноценного ему, позволяющего представить значение выражения разностью квадратов двух нечётных чисел и использовать особенности её разложения на множители.

Ключевые слова: разность квадратов, общий делитель, разложение на множители.

The proof of Andrew Beal's hypothesis

Vedernikov Sergey Ivanovich – Retired, Moscow

Abstract. The methods of proof of the Andrew Beal's hypothesis, used in the article, show a basic equation equivalent to the original one, which allows to present the value of the expression by the difference of squares of two odd numbers and to use the features of its factorization.

Keywords: difference of squares, common divisor, factorization.

Имеется:

$$A^x + B^y = C^z, \quad (1) \qquad x, y, z > 2 .$$

Доказать: A, B, C имеют общий простой делитель.

Доказательство.

Пусть C > A > B. Определимся с чётностью A, B, C. А именно: два из этих чисел должны быть нечётными, а одно чётным. Случай, когда A, B, C чётные, приводится к первому путём сокращения чётных A, B, C на определённое чётное число. Примем A и C нечётными числами, а B чётным числом, поскольку принципиальной разницы между числами A и B нет. (О возможности чётного C будет обговорено ниже.)

Исходя из посыла, что любое чётное число, имеющее делителем 2^n при n $\geq$ 3, можно выразить разностью квадратов двух нечётных чисел, произведём следующие преобразования.

Преобразуем ф. (1).

$$C^z - A^x = B^y. \quad (2)$$

Прибавим к левой и правой частям ф. (2) $2 \cdot A^x$.

$$C^z + A^x = B^y + 2 \cdot A^x. \quad (3)$$

Выразим ф. (2) и ф. (3) следующим образом:

$$C^z - A^x = 2^y \cdot B_1^y. \quad (3)$$

$$C^z + A^x = 2^y \cdot B_1^y + 2 \cdot A^x = 2 \cdot (2^{(y-1)} \cdot B_1^y + A^x). \quad (4)$$

В формуле (4) число $(2^{(y-1)} \cdot B_1^y + A^x)$ нечётное, которое можно обозначить как k, но для дальнейшего доказательства предположим, что $\left(2^{(y-1)} \cdot B_1^y + A^x\right) = B_2^y$, поскольку число $2 \cdot (2^{(y-1)} \cdot B_1^y + A^x)$ нельзя принять n – ой степенью целого числа при n ≥ 2, т. к. оно имеет только один множитель 2.

Запишем ф. (3) и ф. (4) следующим образом:

$$C^z - A^x = B^y; \quad (5)$$

$$C^z + A^x = 2 \cdot B_2^y. \quad (6)$$

Примем для простоты $C^z = C_1$, а $A^x = A_1$.

Тогда ф. (5) и ф. (6) примут вид:

$$C_1 - A_1 = B^Y; \qquad (7)$$

$$C_1 + A_1 = 2 \cdot B_2^y. \qquad (8)$$

Перемножим левые и правые части ф. (7) и ф. (8).

$$C_1^2 - A_1^2 = 2 \cdot B^y \cdot B_2^y. \qquad (9)$$

Формула (9) не что иное, как выражение чётного числа $2 \cdot B^y \cdot B_2^y$ разностью квадратов двух нечётных чисел.

Известно, что сумма и разность двух нечётных чисел, числа чётные, но одно из них имеет делителем только одно число 2, а второе – минимум 2^2.

Вариантов разложения чётного числа в степени n≥ 3 может быть столько, сколько возможно сочетаний пар множителей, составляющих это число. В рассматриваемом случае важна одна особенность такого разложения, заключающаяся в том, что его нужно разделить на два способа.

1- ый способ: множители разложения кроме числа 2 имеют ещё один или несколько простых делителей.

2 – ой способ: множители разложения не имеют общего делителя, кроме числа 2.

Выполним действия аналогичные рассмотренным автором в Случае 2 «Доказательства Великой теоремы Ферма методом деления» ф.(6) и ф.(7).[1]

Сложим почленно левые и правые части ф. (7) и ф. (8).

$$2 \cdot C_1 = 2 \cdot B_2^y + B^y; \qquad C_1 = \frac{(2 \cdot B_2^y + B^y)}{2} = 2 \cdot \frac{B_2^y + 2^{(y-1)} \cdot B_1^y}{2}.$$

$$C_1 = B_2^y + 2^{(y-1)} \cdot B_1^y. \qquad (10)$$

Вычтем почленно ф. (7) из ф. (8).

$$2 \cdot A_1 = 2 \cdot B_2^y - B^y; \qquad A_1 = \frac{2 \cdot B_2^y - B^y}{2} = 2 \cdot \frac{B_2^Y - 2^{(y-1)} \cdot B_1^Y}{2}.$$

$$A_1 = B_2^y - 2^{(y-1)} \cdot B_1^y. \quad (11)$$

Рассмотрим 1-ый способ.

Из ф. (10) и ф. (11) видно, что если B_2^y и B_1^y имеют общий нечётный делитель, поскольку B_2^y нечётное число, то этот делитель имеют числа A_1 и C_1 .

Следовательно, предположение о том, что числа A, B, C могут иметь общий делитель, обосновано.

Рассмотрим 2 - й способ, когда множители разложения не имеют общего делителя кроме числа 2.

Из ф. (10) и ф. (11) видно, что при отсутствии общего делителя в числах B_2^y и B_1^y, общего делителя не будет и у чисел A, B, C.

Обратимся к числу 6^3, имеющем два степенных сомножителя. $6^3 = 2^3 \cdot 3^3$. Выразим $6^3 = 216 = 54 \cdot 4 \cdot 1^2$. Условия для выражения числа 6^3 разностью квадратов двух нечётных чисел соблюдены: 54 = $2 \cdot 27 = 2 \cdot 3^3$, и $4 = 2^2 \cdot 1^3$. (Нужно пояснить значение 2^2. В ф. (10) и ф. (11) она выражена $2^{(y-1)}$.)

Сложим множители 54 и 4. 54 + 4 = 58.

Найдём средне арифметическое. 58 : 2 = 29 – это первое нечётное число.

Вычтем из него второй множитель. 29 – 4 = 25 – это второе нечётное число.

Имеем: (29 – 25)(29 + 25) = 4 · 54.

Здесь члены выражения не имеют общего делителя, а число $8 = 2^3$, множитель числа $6^3 = 2^3 \cdot 3^3$, поделено на 2 и 4. Подобным образом происходит разложение на множители любой пифагоровой тройки. [2] (См. «Общий случай Полного доказательства Великой теоремы Ферма методом деления» формулы (3а) и (4а).) [3] Отсюда можно сделать вывод о том, что это общее правило разложения на множители по формуле разности квадратов двух нечётных чисел любого чётного числа в степени n при n > 2, если множители разложения не имеют общего делителя, т. е. должны быть в степени n, кроме чисел 2 и $2^{(n-1)}$. (См. Случай 2, формулы (6) и (7), Доказательства Великой теоремы Ферма методом деления.) [1]

Ранее было предположено, что $\left(2^{(y-1)} \cdot B_1^y + A^x\right) = B_2^y$, что согласуется с верхним абзацем. Рассмотрим ф. (9) . $C_1^2 - A_1^2 = 2 \cdot B^y \cdot B_2^y$. Примем $B^y \cdot B_2^y = B_3^Y$. Имеем:

$$\mathrm{C}_1^2 - A_1^2 = 2 \cdot B_3^y. \quad (12)$$

Очевидно, что разложение числа $2 \cdot B_3^y$ на множители по формуле разности квадратов нечётных чисел не соответствует выше рассмотренному условию, зато этому условию соответствует разложение на множители числа B_3^y. Поэтому выразим B_3^y разностью квадратов чисел C_2 и A_2. Тогда ф. (12) будет такой:

$$\mathrm{C}_1^2 - A_1^2 = 2 \cdot (C_2^2 - A_2^2) = (2 \cdot C_2^2 - 2 \cdot A_2^2). \quad (13)$$

Разложим на множители левую и правую части ф. (13).

$$(\mathrm{C}_1 - A_1)(C_1 + A_1) \neq (\sqrt{2} \cdot C_2 - \sqrt{2} \cdot A_2)(\sqrt{2} \cdot C_2 + \sqrt{2} \cdot A_2. \quad (14)$$

Формула (14) показывает, что при равенстве $\left(2^{(y-1)} \cdot B_1^y + A^x\right) = B_2^y$ в ф.(4), уравнение (9) не имеет решения в целых числах.

Рассмотрим снова уравнение (9): $C_1^2 - A_1^2 = 2 \cdot B^y \cdot B_2^y$. Предположим, что число B_2^y не является целым числом в степени y. Примем $B_2^y = k$. Тогда ф. (9) примет вид:

$$C_1^2 - A_1^2 = 2 \cdot k \cdot B^y. \quad (15)$$

Примем $B^y = (C_3^2 - A_3^2)$. Запишем ф. (15) так:

$$C_1^2 - A_1^2 = 2 \cdot k \cdot (C_3^2 - A_3^2). \quad (16)$$

Разложим левую и правую части уравнения (16) на множители.

$$(C_1 - A_1)(C_1 + A_1) \neq \left(\sqrt{2} \cdot \sqrt{k} \cdot C_3 - \sqrt{2} \cdot \sqrt{k} \cdot A_3\right)\left(\sqrt{2} \cdot \sqrt{k} \cdot C_3 + \sqrt{2} \cdot \sqrt{k} \cdot A_3\right). \quad (17)$$

Из ф. (17) следует, что уравнение (16) невозможно разложить на целочисленные множители, поскольку $\sqrt{2}$ – иррационален, а $\sqrt{k}$ - есть корень из нечётного числа.

Кроме того, такой же вывод следует из ф. (10) и ф. (11), где C_1 и A_1, а следовательно, C^z и A^x невозможно разложить на целочисленные множители, поскольку невозможно разложить правую часть ф. (11) на целочисленные множители по формуле разложения на множители разности n – x степеней, а правую часть ф. (10) - на целочисленные множители по формуле разложения на множители суммы n – x степеней при $n = 2 \cdot k + 1$. (См. Случай 2 « Доказательства Великой теоремы Ферма методом деления» ф. (6) и ф. (7).) [1]

Вывод: при отсутствии общих множителей в числах A, B, C уравнение $A^x + B^y = C^z$ не имеет решения в целых числах.

Поскольку уравнение $X^n + Y^n = Z^n$, при n > 2, является частным случаем уравнения (1), то этот вывод относится и к теореме Ферма.

Нами рассмотрен случай, когда число B ф. (1) - чётное. Предположим, что чётным является число C, а числа A и B - нечётные.

Преобразуем ф. (1), вычтя из левой и правой её частей $2 \cdot B^y$. Имеем:

$$A^x - B^y = C^z - 2 \cdot B^y. \quad (18)$$

Перемножим левые и правые части ф. (1) и ф. (18). Имеем:

$$A^{2x} - B^{2y} = C^z \cdot (C^z - 2 \cdot B^y). \quad (19)$$

Доказательство, следующее за ф. (19), аналогично выше рассмотренному.

Следовательно, утверждение, что числа A, B, C имеют общий простой делитель при $A^x + B^y = C^z$, где x, y, z > 2 доказано, а значит Теорема (гипотеза) Била доказана.

Список литературы:

1. Ведерников С. И. Доказательство Великой теоремы Ферма методом деления. Журнал «Проблемы современной науки и образования» №33(115) 2017. Изд.: «Проблемы науки».
2. Серпинский В. Пифагоровы треугольники. М.: Учпедгиз, 1959.
3. Ведерников С. И. Общий случай «Полного доказательства Великой теоремы Ферма методом деления». Журнал «Интернаука». №29(63). Изд.: «Интернаука».