L' attraction des nombres par la force Syracusienne

13 Décembre 2018

M.Sghiar

msghiar21@gmail.com

9 Allée capitaine Jean Bernard Bossu, 21240, Talant

FRANCE

Abstract : I show here that if $x \in \mathbb{N}^*$ then $1 \in \mathcal{O}_S(x) = \{S^n(x), n \in \mathbb{N}^*\}$ where $\mathcal{O}_S(x)$ is the orbit of the function S defined on $\mathbb{R}^+$ by $S(x) = \frac{x}{2}+(x+\frac{1}{2})sin^2(x\frac{\pi}{2})$, and I deduce the proof of the Syracuse conjecture.

Résumé : Je démontre que si $x \in \mathbb{N}^*$ alors $1 \in \mathcal{O}_S(x) = \{S^n(x), n \in \mathbb{N}^*\}$ où $\mathcal{O}_S(x)$ est l'orbite de la fonction S définie sur $\mathbb{R}^+$ par $S(x) = \frac{x}{2}+(x+\frac{1}{2})sin^2(x\frac{\pi}{2})$, et j'en déduis une preuve de la conjecture de Syracuse.

Keywords : la conjecture de Syracuse, Syracuse, conjecture de Collatz, conjecture d'Ulam, conjecture tchèque, problème 3x+1.

The Subject Classification Codes : 11A99 - 46G99 - 26A09- 26A42

Introduction, notations et définitions :

La conjecture de Syracuse, introduite par Lothar Collatz et ouverte depuis 1928 ([2], [3], [1]) est encore appelée conjecture de Collatz, conjecture d'Ulam, conjecture tchèque ou problème 3x+1.

Le but de cet article est de démontrer cette belle conjecture dont Paul Erdos a dit [4] " les mathématiques ne sont pas encore prêtes pour de tels problèmes " .

La suite de Syracuse d'un nombre entier N est définie par récurrence, de la manière suivante :

$u_0 = N$, et pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} = \begin{cases} \frac{u_n}{2} & \text{si } u_n \text{ est pair} \\ 3u_n + 1 & \text{si } u_n \text{ est impair} \end{cases}$

Je définis la fonction S définie sur $\mathbb{R}^+$ par $S(x) = \frac{x}{2} + (x + \frac{1}{2})sin^2(x\frac{\pi}{2})$.

$\mathcal{O}_S(x) = \{S^n(x), n \in \mathbb{N}^*\}$ est l'**orbite** de x sous l'action de S.

D'abord dans le corollaire 2 je démontre que l'orbite de tout nombre non nul est fini si il ne passe pas par le nombre 1. Puis dans le corollaire 3 je démontre que le seul cycle qui puisse exister sous l'action de la force syracausienne est le cycle $\{1, 2\}$ (classiquement c'est cycle $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2$). Et on conclut que tout nombre non nul (assimilé à un corps), sous l'action de l'attraction de la force Syracusienne, finira par tomber sur 1 dans le vaste océan des nombres.

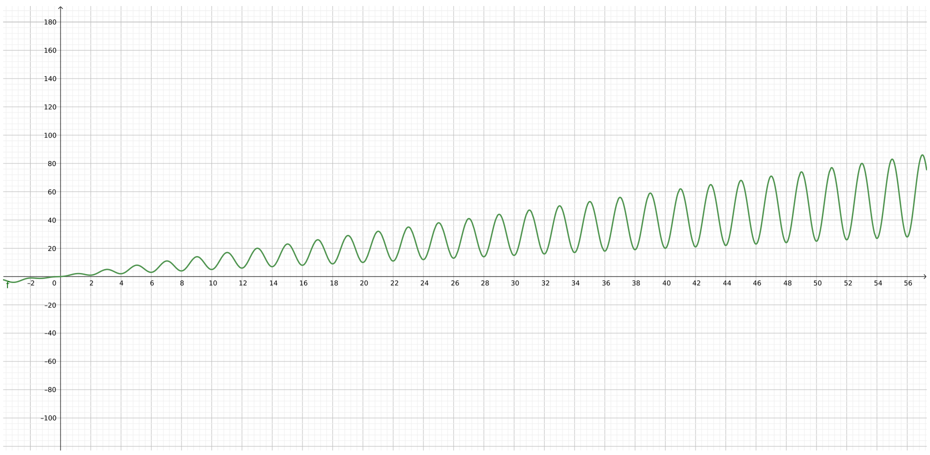

FIGURE 1 – Courbe de Sghiar-Syracuse

Théorème 1 (Conjecture de Syracuse)**.** *Pour tout entier* $u_0 = N > 0$, *il existe un indice* n *tel que* $u_n = 1$.

La preuve de ce théorème 1 va résulter de cette proposition 1 :

Proposition 1 (Théorème de Sghiar-Syracure)**.** *Soit S la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $S(x) = \frac{x}{2} + (x + \frac{1}{2})sin^2(x\frac{\pi}{2})$. Si $x \in \mathbb{N}^*$, alors $1 \in \mathcal{O}_S(x)$*

Lemme 1. *Si S est la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $S(x) = \frac{x}{2} + (x + \frac{1}{2})sin^2(x\frac{\pi}{2})$, alors $S(x) = x - \frac{x}{2}cos(x\pi) + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}cos(x\pi)$*

Démonstration. Il suffit d'utiliser le fait que $cos(2a) = 1 - 2sin^2(a)$

□

Lemme 2. $\int_0^{S^n(x)} S(t)dt = \frac{1}{2}(S^n(x))^2 + \frac{1}{4}S^n(x) - \frac{1}{4\pi}sin(\pi S^n(x)) - \frac{1}{2\pi}S^n(x)sin(\pi S^n(x)) + \frac{1}{2\pi^2}cos(\pi S^n(x)) - \frac{1}{2\pi}$

Démonstration. D'après le lemme 1, on a : $S(t) = t - \frac{t}{2}cos(t\pi) + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}cos(t\pi)$, donc $\int_0^{S^n(x)} S(t)dt = \int_0^{S^n(x)}(t - \frac{t}{2}cos(t\pi) + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}cos(t\pi))dt$ et le résultat s'en déduit par intégration.

□

Corollaire 1. *Si $S^n(x) \to +\infty$ alors* $\lim\limits_{S^n(x)\to+\infty} \int_0^{S^n(x)} \frac{S(t)}{(S^n(x))^2}dt = \frac{1}{2}$

Lemme 3. *Si $(a, b) \in \mathbb{N}^* \times (2\mathbb{N} + 1)$, avec $a \lneqq b$, alors on a :*

i- $S(a) \leq S(t) \leq S(b), \forall t \in]a, b[$ si a est pair.

ii- $S(a + 1) \leq S(t) \leq S(b), \forall t \in]a + 1, b[$ si a est impair.

iii- De même $S(a - 1) \leq S(t) \leq S(b), \forall t \in]a - 1, b[$ si a est impair.

Démonstration. On a : $\frac{t}{2} \leq S(t) \leq \frac{3t+1}{2}$. Donc $\frac{a}{2} \leq \frac{t}{2} \leq S(t) \leq \frac{3t+1}{2} \leq \frac{3b+1}{2}$, soit $S(a) \leq S(t) \leq S(b), \forall t \in]a, b[$ si a est pair.

Et $\forall t \in]a + 1, b[$ on a : $\frac{a+1}{2} \leq \frac{t}{2} \leq S(t) \leq \frac{3t+1}{2} \leq \frac{3b+1}{2}$, soit $S(a + 1) \leq S(t) \leq S(b), \forall t \in]a + 1, b[$ si a est impair. (Voir Figure 1)

□

Lemme 4. *Si $S^n(x) \neq 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$, alors $\int_{S(S^{m-1}(x)-1)}^{S(S^{m-1}(x))} \frac{S(t)}{(S^m(x))^2}dt \geq \frac{1}{32}$ pour $S^{m-1}(x)$ impair.*

Démonstration. En utilisant le lemme 3 deux cas se présentent :

Cas 1 : Si $S(S^{m-1}(x) - 1)$ est pair :

$\int_{S(S^{m-1}(x)-1)}^{S(S^{m-1}(x))} \frac{S(t)}{(S^m(x))^2}dt \geq (S(S^{m-1}(x)) - S(S^{m-1}(x) - 1))\frac{S(S(S^{m-1}(x)-1))}{(S^m(x))^2}$.

Or $S(S^{m-1}(x)) - S(S^{m-1}(x) - 1) = S^{m-1}(x) + \frac{1}{2} \geq S^{m-1}(x)$ et $\frac{S(S(S^{m-1}(x)-1))}{(S^m(x))^2} = \frac{1}{2}\frac{\frac{S^{m-1}(x)-1}{2}}{(S^m(x))^2}$, et par suite $(S(S^{m-1}(x)) - S(S^{m-1}(x) - 1))\frac{S(S(S^{m-1}(x)-1))}{(S^m(x))^2} \geq \frac{1}{4}(\frac{S^{m-1}(x)}{S^m(x)})^2(1 - \frac{1}{S^{m-1}(x)}) \geq \frac{1}{8}(\frac{S^{m-1}(x)}{S^m(x)})^2$ car $S^{m-1}(x) \geq 2$ puisque $S^{m-1}(x) \neq 1$.

Et comme $S^{m-1}(x)$ est impair, alors $S^m(x) = \frac{3S^{m-1}(x)+1}{2}$. Et par suite $\frac{1}{8}(\frac{S^{m-1}(x)}{S^m(x)})^2 \geq \frac{1}{8}(\frac{2}{3+\frac{1}{S^{m-1}(x)}})^2 \geq \frac{1}{32}$.

Cas 2 : Si $S(S^{m-1}(x)-1)$ est impair :

$\int_{S(S^{m-1}(x)-1)}^{S(S^{m-1}(x))} \frac{S(t)}{(S^m(x))^2} dt \geq (S(S^{m-1}(x)) - S(S^{m-1}(x)-1)) \frac{S(S(S^{m-1}(x)-1)+1)}{(S^m(x))^2}$.

Or $S(S^{m-1}(x)) - S(S^{m-1}(x)-1) = S^{m-1}(x) + \frac{1}{2} \geq S^{m-1}(x)$ et $\frac{S(S(S^{m-1}(x)-1)+1)}{(S^m(x))^2} = \frac{1}{2}\frac{S(S^{m-1}(x)-1)+1}{(S^m(x))^2} \geq \frac{1}{2}\frac{S(S^{m-1}(x)-1)}{(S^m(x))^2} = \frac{1}{2}\frac{\frac{3(S^{m-1}(x)-1)+1}{2}}{(S^m(x))^2}$, et par suite $(S(S^{m-1}(x)) - S(S^{m-1}(x)-1))\frac{S(S(S^{m-1}(x)-1))}{(S^m(x))^2} \geq \frac{3}{4}(\frac{S^{m-1}(x)}{S^m(x)})^2(1-\frac{1}{S^{m-1}(x)}) \geq \frac{3}{8}(\frac{S^{m-1}(x)}{S^m(x)})^2$ car $S^{m-1}(x) \geq 2$ puisque $S^{m-1}(x) \neq 1$.

Et comme $S^{m-1}(x)$ est impair, alors $S^m(x) = \frac{3S^{m-1}(x)+1}{2}$. Et par suite $\frac{3}{8}(\frac{S^{m-1}(x)}{S^m(x)})^2 \geq \frac{3}{8}(\frac{2}{3+\frac{1}{S^{m-1}(x)}})^2 \geq \frac{3}{32}$.

D'où le résultat.

□

Remarque 1. *En prolongeant* $\mathbb{R}$ *par* $\overline{\mathbb{R}} =< \mathbb{R}, +\infty, -\infty >$ *le plus petit anneau contenant* $\mathbb{R}$, $+\infty$ *et* $-\infty$. $+\infty$ *et* $-\infty$ *sont considérés comme des nombres et on peut effectuer dans* $\overline{\mathbb{R}}$ *le même calcul que dans* $\mathbb{R}$, *en particulier on a :* $1 \times (-\infty) = -\infty, 1 \times (+\infty) = +\infty, a(-\infty) = -a(+\infty), a(+\infty) + b(+\infty) = (a+b)(+\infty), a(+\infty) \times b(+\infty) = (a \times b)(+\infty)^2$, $\frac{a(+\infty)}{c(+\infty)} = \frac{a}{c}$, $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. *On peut même aller plus loin : Par exemple :* $\frac{1}{2} = \int_0^x \frac{t}{x^2} dt$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x \frac{t}{x^2} dt = \lim\limits_{x \to +\infty} (\frac{1}{x^2} \times \int_0^x tdt) = \lim\limits_{x \to +\infty} (\frac{1}{x^2}) \times \lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x tdt = \frac{1}{(+\infty)^2} \times \int_0^{+\infty} tdt = \frac{1}{(+\infty)^2} \times \frac{1}{2}(+\infty)^2 = \frac{1}{2}$.

En utilisant la remarque 1, on va montrer le corollaire 2 suivant :

Corollaire 2. *Si* $x \in \mathbb{N}^*$, *et si* $1 \notin \mathcal{O}_S(x)$, *alors* $card(\mathcal{O}_S(x)) < +\infty$.

Démonstration. En effet, si $\text{card}(\mathcal{O}_S(x)) = +\infty$ alors l' ensemble $I = \{m \in \mathbb{N},\ S^{m-1}(x)$ est impair $\}$ est fini car sinon en utilisant le corollaire 1 et la remarque 1 on a : $\frac{1}{2} = \lim\limits_{S^n(x) \to +\infty} \int_0^{S^n(x)} \frac{S(t)}{(S^n(x))^2} dt = \lim\limits_{S^n(x) \to +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{S(t)}{(S^n(x))^2} dt \geq \sum_{m \in I} (\int_{S(S^{m-1}(x)-1)}^{S(S^{m-1}(x))} \frac{S(t)}{(S^n(x))^2} dt) \geq \sum_{m \in I, S^m(x) \geq S^n(x)} (\int_{S(S^{m-1}(x)-1)}^{S(S^{m-1}(x))} \frac{S(t)}{(S^m(x))^2} dt) \geq 32 \times \frac{1}{32} \geq 1$ (d'après le lemme 4), ce qui est absurde, et il s'en suit que $P = \{m \in \mathbb{N},\ S^{m-1}(x)$ est pair $\}$ est fini. Donc $\text{card}(\mathcal{O}_S(x)) \neq +\infty$, ce qui est absurde.

□

Lemme 5. *Si $S^n(x) = x$ alors $\forall i \in \{0, \ldots, n-1\}$, il existe un unique couple (A_{n-i}, B_{n-i}) tel que $S^{n-i}(x) = A_{n-i}x + B_{n-i}$ avec $B_{n-i} + 1 \leq A_{n-i}$, $A_n = 1$ et $B_n = 0$. Et les A_{n-i} sont minimales.*
De plus si $\exists i \in \{1, \ldots, n-2\}$ tel que $S^{n-i}(x) = 2S^{n-\{i-1\}}(x) = 2(A_{n-\{i-1\}}x + B_{n-\{i-1\}})$, alors $B_1 + 1 \lneqq A_1$.
Enfin $(A_1, B_1) = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$

Démonstration. - On a $A_n = 1, B_n = 0$, et $B_n + 1 \leq A_n$. Montrons le résultat par récurrence .
Si $B_{n-i} + 1 \leq A_{n-i}$ avec $S^{n-i}(x) = A_{n-i}x + B_{n-i}$, alors , comme
$S^{n-i}(x) = S(S^{n-\{i+1\}})(x)$, on a :
Soit $S^{n-\{i+1\}}(x) = 2(A_{n-i}x + B_{n-i}) = 2A_{n-i}x + 2B_{n-i} = 2S^{n-i}(x)$ avec $2B_{n-i} + 1 \lneqq 2A_{n-i}$
Soit $S^{n-\{i+1\}}(x) = \frac{2(A_{n-i}x+B_{n-i})-1}{3} = \frac{2A_{n-i}}{3}x + \frac{2B_{n-i}-1}{3}$ avec $\frac{2B_{n-i}-1}{3} + 1 \leq \frac{2A_{n-i}}{3}$
Dans le premier cas :
$A_{n-\{i+1\}} = 2A_{n-i}$ et $B_{n-\{i+1\}} = 2B_{n-i}$
Et dans le deuxième cas :
$A_{n-\{i+1\}} = \frac{2A_{n-i}}{3}$ et $B_{n-\{i+1\}} = \frac{2B_{n-i}-1}{3}$
- L'unicité se déduit de la minimalité
- $S^1(x) = A_1x + B_1 = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$. Donc $B_1 = (\frac{3}{2} - A_1)x + \frac{1}{2}$.
Or $B_1 + 1 \leq A_1 \Longrightarrow (\frac{3}{2} - A_1)x + \frac{3}{2} \leq A_1 \Longrightarrow \frac{3}{2} \leq A_1$, donc $(A_1, B_1) = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ par minimalité.

□

Corollaire 3. *Si $x \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1, 2\}$ alors $S^n(x) \neq x$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$*

Démonstration. **1 cas : Si** $n \geq 3$
Si $S^n(x) = x$ alors du lemme 5, si $\exists i \in \{1, \ldots, n-2\}$ tel que $S^{n-i}(x) = 2S^{n-\{i-1\}}(x) = 2(A_{n-\{i-1\}}x + B_{n-\{i-1\}})$, alors $B_1 + 1 \lneqq A_1$, or si x est impair , on a $B_1 = \frac{1}{2}$ et $A_1 = \frac{3}{2}$ (car $S(x) = \frac{3}{2} \times x + \frac{1}{2}$), mais on n'a pas : $B_1 + 1 \lneqq A_1$. Et si x est pair alors $B_1 = 0$ et $A_1 = \frac{1}{2}$ (car $S(x) = \frac{x}{2}$), mais on n'a pas : $B_1 + 1 \lneqq A_1$
Donc $\forall i \in \{1, \ldots, n-2\}$, $S^{n-i}(x) = \frac{2(A_{n-i}x+B_{n-i})-1}{3}$ avec $B_{n-i} + 1 \leq A_{n-i}$.

Mais dans ce cas la récurrence impose que $\forall i \in \{1, \ldots, n-2\}$, $B_{n-i} \leq 0$ et $A_{n-i} \gneqq \frac{2}{3}$ pour $i \geq 2$.
Pour $i = 1$, on aura : $S^{n-1}(x) \leq x$ et $S^{n-1}(x) = \frac{2x-1}{3}$. En poursuivant comme dans la preuve du lemme 5 on aura $S^1(x) = A_1 x + B_1$ avec $B_1 + 1 \lneqq A_1$. Or du lemme 5 $S^1(x) = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$ mais on a pas $B_1 + 1 \lneqq A_1$.
On conclut donc que dans ce cas on ne peut pas avoir $S^n(x) = x$.
2 cas : Si $n \leq 2$
Dans ce cas $S^n(x) = x \Longrightarrow x \in \{0, 1, 2\}$

□

Preuve de la proposition 1 :

Démonstration. Si $x \in \mathbb{N}^*$, alors $1 \in \mathcal{O}_S(x)$: En effet le résultat est évident pour $x \in \{1, 2\}$.
Si $x \in \mathbb{N} \backslash \{0, 1, 2\}$, du corollaire 2, si $1 \notin \mathcal{O}_S(x)$ alors $\mathrm{card}(\mathcal{O}_S(x)) < +\infty$. Donc il existe un $y \in \mathcal{O}_S(x)$, tel que $S^n(y) = y$ avec $y \in \mathbb{N}^*$ (Facile à voir), or du corollaire 3 $y \in \{0, 1, 2\}$ donc $y \in \{1, 2\}$, et $1 \in \mathcal{O}_S(y)$. Et par suite $1 \in \mathcal{O}_S(x)$.

□

Conclusion :
Les difficultés rencontrés pour démontrer la conjecture de Syracuse, en dépit de l'application acharnée de méthodes mathématiques puissantes par des esprits brillants a conduit certains chercheurs à se demander si la conjecture de Syracuse est un problème indécidable. D'autres, comme Paul Erdos qui a dit de la dite conjecture [4] " les mathématiques ne sont pas encore prêtes pour de tels problèmes " , pensaient que la preuve de cette conjecture ne rentre pas dans les trajectoires mathématiques.
J'ai prouvé dans cet article que, comme les nombres qui ne peuvent pas s'échapper à la force Syracusienne et finiront par tomber sur le nombre 1, la preuve de la conjecture Syracausienne elle aussi ne peut s'échapper à la force des mathématiques contrairement à se que a dit Paul Erdos et d'autres [4] .
Remerciements :
Je tiens à remercier tout ceux qui ont contribué pour la réussite du résultat de cet article.

Références

[1] R. E. Crandall. On the "3x + 1" problem. *Math. Comp.*, 32 :1281–1292, 1978.

[2] Jean-Paul Delahaye. La conjecture de syracuse. *Pour la science, http://cristal.univ-lille.fr/~jdelahay/pls/053.pdf*, (247), Mai 1998.

[3] Luc-Olivier Pochon et Alain Favre. La suite de syracuse, un monde de conjectures. *Hal.archives-ouvertes.fr* , *https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01593181*, Sep 2017.

[4] R. K. Guy. Don't try to solve these problems ! *Amer. Math. Monthly*, 90 :35–41, 1983.