Considérations sur la formule du binôme de Newton

$$(x+y)^n = x^n + y^n + xy\sum_{j=1}^{n-2}\left(x^j + y^j\right)(x+y)^{n-2-j}$$

Auteur : Olivier Massot
Adresse : 50 Newton Road # 05-02 Singapore 307991 Republic of Singapore
Email : omassot@singnet.com.sg

Résumé

La formule du binôme, établie par Isaac Newton, est d'une importance incontestable et trouve son usage dans de très nombreux domaines. Cette étude présente une écriture différente de la formule de Newton.

Chapitre 1

Une autre façon d'exprimer la formule du binôme de Newton.

1.1 Objet du chapitre

La formule du binôme peut être réécrite. Cette nouvelle formulation permet à son tour de procéder à d'autres calculs qui mettent en évidence certaines propriétés que la formule originale ne permet pas de dégager.

1.2 Une autre formule.

Soit un entier naturel n donné, x et y étant deux nombres réels non nuls. Dans tout ce qui suit, cet entier n est supposé supérieur ou égal à 3. Nous pouvons écrire

$$\frac{(x+y)^n - x^n}{(x+y)-x} = \sum_{j=0}^{n-1} (x+y)^{n-1-j}\, x^j = \frac{(x+y)^n - x^n}{y}$$

et de même

$$\frac{(x+y)^n - y^n}{(x+y)-y} = \sum_{j=0}^{n-1} (x+y)^{n-1-j}\, y^j = \frac{(x+y)^n - y^n}{x}$$

Sommons ces deux quantités

$$\frac{(x+y)^n - x^n}{y} + \frac{(x+y)^n - y^n}{x} = \sum_{j=0}^{n-1} (x+y)^{n-1-j} \left(x^j + y^j\right)$$

et nous obtenons la formule

$$(x+y)^{n+1} - \left(x^{n+1} + y^{n+1}\right) = xy \sum_{j=0}^{n-1} (x+y)^{n-1-j} \left(x^j + y^j\right)$$

que par commodité nous écrivons

$$(x+y)^n - (x^n + y^n) = xy \sum_{j=0}^{n-2} (x+y)^{n-2-j} \left(x^j + y^j\right) \tag{1.1}$$

La formule de Newton, que nous rappelons ici

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} C_n^j x^{n-j} y^j \tag{1.2}$$

où

$$C_n^j = \frac{n!}{(n-j)!j!} \tag{1.3}$$

permet donc d'établir l'égalité

$$\sum_{j=0}^{n-2} (x+y)^{n-2-j} \left(x^j + y^j\right) = \sum_{j=1}^{n-1} C_n^j x^{n-j-1} y^{j-1}$$

soit finalement

$$\sum_{j=0}^{n-2} (x+y)^{n-2-j} \left(x^j + y^j\right) = \sum_{j=0}^{n-2} C_n^{j+1} x^{n-2-j} y^j$$

1.3 Etude de la nouvelle formule.

Posons

$$A_n(x,y) = \sum_{j=0}^{n-2} (x+y)^{n-2-j} \left(x^j + y^j\right) \tag{1.4}$$

Remarquons tout d'abord que

$$\sum_{j=0}^{n-2} (x+y)^{n-2-j} \left(x^j + y^j\right) = \sum_{j=0}^{p-2} (x+y)^{n-2-j} \left(x^j + y^j\right) + \sum_{j=p-1}^{n-2} (x+y)^{n-2-j} \left(x^j + y^j\right)$$

avec $p \in \mathbb{N}^*$ et $p < n$, soit encore

$$\sum_{j=0}^{n-2} (x+y)^{n-2-j} \left(x^j + y^j\right) = \sum_{j=0}^{p-2} (x+y)^{(n-p)+(p-2-j)} \left(x^j + y^j\right) + \sum_{j=p-1}^{n-2} (x+y)^{n-2-(j-(p-1)+p-1)} \left(x^{j-(p-1)+p-1} + y^{j-(p-1)+p-1}\right)$$

et

$$\sum_{j=0}^{n-2} (x+y)^{n-2-j} \left(x^j + y^j\right) =$$

$$(x+y)^{n-p} \sum_{j=0}^{p-2} (x+y)^{p-2-j} \left(x^j + y^j\right)$$
$$+ \sum_{j=0}^{n-2-(p-1)} (x+y)^{n-2-(j+p-1)} \left(x^{j+p-1} + y^{j+p-1}\right)$$

et

$$\sum_{j=0}^{n-2} (x+y)^{n-2-j} \left(x^j + y^j\right) =$$

$$(x+y)^{n-p} \sum_{j=0}^{p-2} (x+y)^{p-2-j} \left(x^j + y^j\right)$$
$$+ \sum_{j=0}^{n-2-(p-1)} (x+y)^{n-p-1-j} \left(x^{j+p-1} + y^{j+p-1}\right)$$

et enfin

$$A_n(x,y) = (x+y)^{n-p} A_p(x,y)$$
$$+ \sum_{j=0}^{n-2-(p-1)} (x+y)^{n-p-1-j} \left(x^{j+p-1} + y^{j+p-1}\right)$$

Considérons maintenant le cas où $n = p+1$, alors

$$A_{p+1}(x,y) = (x+y) A_p(x,y) + \sum_{j=0}^{0} (x+y)^{-j} \left(x^{j+p-1} + y^{j+p-1}\right)$$

soit encore

$$A_{p+1}(x,y) = (x+y) A_p(x,y) + \left(x^{p-1} + y^{p-1}\right)$$

mais

$$x^{p-1} + y^{p-1} = (x+y)^{p-1} - xyA_{p-1}(x,y)$$

et donc

$$A_{p+1}(x,y) = (x+y) A_p(x,y) + (x+y)^{p-1} - xyA_{p-1}(x,y) \tag{1.5}$$

Concentrons nous maintenant plus particulièrement sur $A_n(x,y)$ et développons cette quantité à partir de la formule 1.4 en page 2. Il vient

$$\begin{aligned}
A_n(x,y) &= 3(x+y)^{n-2} + \sum_{j=0}^{n-4} (x+y)^{n-4-j}\left(x^{j+2}+y^{j+2}\right) \\
&= 3(x+y)^{n-2} + \left(x^2+y^2\right)^{n-4} + \sum_{j=0}^{n-5} (x+y)^{n-5-j}\left(x^{j+3}+y^{j+3}\right) \\
&= 3(x+y)^{n-2} + (x+y)^{n-2} - 2xy(x+y)^{n-4} + \sum_{j=0}^{n-5} (x+y)^{n-5-j}\left(x^{j+3}+y^{j+3}\right) \\
&= 4(x+y)^{n-2} - 2xy(x+y)^{n-4} + \sum_{j=0}^{n-5} (x+y)^{n-5-j}\left(x^{j+3}+y^{j+3}\right)
\end{aligned}$$

En poursuivant les calculs de cette manière, nous obtenons

$$\begin{aligned}
A_n(x,y) = 5(x+y)^{n-2} \\
- 5xy(x+y)^{n-4} + \sum_{j=0}^{n-6} (x+y)^{n-6-j}\left(x^{j+4}+y^{j+4}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_n(x,y) = 6(x+y)^{n-2} - 9xy(x+y)^{n-4} + 2x^2y^2(x+y)^{n-6} \\
+ \sum_{j=0}^{n-7} (x+y)^{n-7-j}\left(x^{j+5}+y^{j+5}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_n(x,y) = 7(x+y)^{n-2} - 14xy(x+y)^{n-4} + 7x^2y^2(x+y)^{n-6} \\
+ \sum_{j=0}^{n-8} (x+y)^{n-8-j}\left(x^{j+6}+y^{j+6}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_n(x,y) = 8(x+y)^{n-2} - 20xy(x+y)^{n-4} + 16x^2y^2(x+y)^{n-6} - 2x^3y^3(x+y)^{n-8} \\
+ \sum_{j=0}^{n-9} (x+y)^{n-9-j}\left(x^{j+7}+y^{j+7}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_n(x,y) = 9(x+y)^{n-2} - 27xy(x+y)^{n-4} + 30x^2y^2(x+y)^{n-6} - 9x^3y^3(x+y)^{n-8} \\
+ \sum_{j=0}^{n-10} (x+y)^{n-10-j}\left(x^{j+8}+y^{j+8}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_n(x,y) = 10(x+y)^{n-2} - 35xy(x+y)^{n-4} + 50x^2y^2(x+y)^{n-6} - 25x^3y^3(x+y)^{n-8} \\
+ 2x^4y^4(x+y)^{n-10} \\
+ \sum_{j=0}^{n-11} (x+y)^{n-11-j}\left(x^{j+9}+y^{j+9}\right)
\end{aligned}$$

$$A_n(x,y) = 11(x+y)^{n-2} - 44xy(x+y)^{n-4} + 77x^2y^2(x+y)^{n-6} - 55x^3y^3(x+y)^{n-8} + 11x^4y^4(x+y)^{n-10} + \sum_{j=0}^{n-12}(x+y)^{n-12-j}\left(x^{j+10}+y^{j+10}\right)$$

Il est bien sur possible de pousser ces calculs aussi loin que nous le désirons. En donnant à n les valeurs 3, 4, 5, 6,..., nous en déduisons les nouveaux développements respectifs de $A_3(x,y)$, $A_4(x,y)$, $A_5(x,y)$, $A_6(x,y)$, etc.

Supposons à présent les formules suivantes respectivement vraies jusqu'aux rangs $2k$ et $2k+1$, avec $k \in \mathbb{N}^*$

$$A_{2k}(x,y) = \sum_{j=0}^{k-1} D_{2k}^{j}(-1)^j(xy)^j(x+y)^{2(k-1-j)} \tag{1.6}$$

$$A_{2k+1}(x,y) = (x+y)\sum_{j=0}^{k-1} D_{2k+1}^{j}(-1)^j(xy)^j(x+y)^{2(k-1-j)} \tag{1.7}$$

Les coefficients D_{2k}^{j} et D_{2k+1}^{j} sont si possible à expliciter (et le seront en effet par la suite).

Reprenons l''equation 1.5 page 3 et réécrivons la sous la forme

$$A_{2k+2}(x,y) = (x+y)A_{2k+1}(x,y) + (x+y)^{2k} - xyA_{2k}(x,y)$$

Explicitons maintenant cette relation

$$A_{2k+2}(x,y) = (x+y)^2\sum_{j=0}^{k-1} D_{2k+1}^{j}(-1)^j(xy)^j(x+y)^{2(k-1-j)} + (x+y)^{2k} - xy\sum_{j=0}^{k-1} D_{2k}^{j}(-1)^j(xy)^j(x+y)^{2(k-1-j)}$$

$$\iff$$

$$A_{2k+2}(x,y) = (x+y)^2\sum_{j=0}^{k-1} D_{2k+1}^{j}(-1)^j(xy)^j(x+y)^{2(k-1-j)} + (x+y)^{2k} + \sum_{j=0}^{k-1} D_{2k}^{j}(-1)^{j+1}(xy)^{j+1}(x+y)^{2(k-1-j)}$$

Poursuivons nos calculs. Nous obtenons de façon équivalente

$$A_{2k+2}(x,y)=\sum_{j=0}^{k-1}D_{2k+1}^{j}(-1)^{j}(xy)^{j}(x+y)^{2(k-j)}$$
$$+(x+y)^{2k}$$
$$+\sum_{j=0}^{k-1}D_{2k}^{j}(-1)^{j+1}(xy)^{j+1}(x+y)^{2(k-1-j)}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$A_{2k+2}(x,y)=\sum_{j=0}^{k-1}D_{2k+1}^{j}(-1)^{j}(xy)^{j}(x+y)^{2(k-j)}$$
$$+(x+y)^{2k}$$
$$+\sum_{j=1}^{k}D_{2k}^{j-1}(-1)^{j}(xy)^{j}(x+y)^{2(k-j)}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$A_{2k+2}(x,y)=\sum_{j=1}^{k-1}\left(D_{2k+1}^{j}+D_{2k}^{j-1}\right)(-1)^{j}(xy)^{j}(x+y)^{2(k-j)}$$
$$+D_{2k+1}^{0}(x+y)^{2k}+(x+y)^{2k}+D_{2k}^{k-1}(xy)^{k}$$

et nous pouvons écrire

$$A_{2k+2}(x.y)=\sum_{j=0}^{k}D_{2k+2}^{j}(-1)^{j}(xy)^{j}(x+y)^{2(k-j)}$$

avec

$$D_{2k+2}^{0}=D_{2k+1}^{0}+1$$
$$D_{2k+2}^{k}=D_{2k}^{k-1}$$

et

$$(\forall j\in\mathbb{N})\,(1\leq j\leq k-1)\left(D_{2k+2}^{j}=D_{2k+1}^{j}+D_{2k}^{j-1}\right)$$

De la même manière, nous avons

$$A_{2k+3}(x,y)=(x+y)\,A_{2k+2}(x,y)+(x+y)^{2k}-xyA_{2k+1}(x,y)$$

Explicitons

$$A_{2k+3}(x,y)=(x+y)\sum_{j=0}^{k}D_{2k+2}^{j}(-1)^{j}(xy)^{j}(x+y)^{2(k-j)}$$
$$+(x+y)^{2k+1}$$
$$-xy\,(x+y)\sum_{j=0}^{k-1}D_{2k+1}^{j}(-1)^{j}(xy)^{j}(x+y)^{2(k-1-j)}$$

d'où

$$A_{2k+3}(x,y) = \sum_{j=0}^{k} D_{2k+2}^{j}(-1)^{j}(xy)^{j}(x+y)^{2(k-j)+1}$$
$$+ (x+y)^{2k+1}$$
$$+ \sum_{j=0}^{k-1} D_{2k+1}^{j}(-1)^{j+1}(xy)^{j+1}(x+y)^{2(k-1-j)+1}$$

ce qui équivaut à

$$A_{2k+3}(x,y) = (x+y)^{2k+1}$$
$$+ \sum_{j=0}^{k} D_{2k+2}^{j}(-1)^{j}(xy)^{j}(x+y)^{2(k-j)+1}$$
$$+ \sum_{j=1}^{k-1} D_{2k+1}^{j-1}(-1)^{j}(xy)^{j}(x+y)^{2(k-j)+1}$$

et aussi

$$A_{2k+3}(x,y) = \left(D_{2k+2}^{0}+1\right)(x+y)^{2k+1}$$
$$+ \sum_{j=1}^{k} \left(D_{2k+2}^{j} + D_{2k+1}^{j-1}\right)(-1)^{j}(xy)^{j}(x+y)^{2(k-j)+1}$$

et nous pouvons enfin écrire

$$A_{2k+3}(x,y) = (x+y)\sum_{j=0}^{k} D_{2k+2}^{j}(-1)^{j}(xy)^{j}(x+y)^{2(k-j)}$$

avec

$$D_{2k+2}^{0} = D_{2k+1}^{0} + 1$$

et

$$(\forall j \in \mathbb{N})\,(1 \leq j \leq k)\left(D_{2k+3}^{j} = D_{2k+2}^{j} + D_{2k+1}^{j-1}\right)$$

Ceci termine notre raisonnement par récurrence et nous pouvons écrire en guise de conclusion

$$(\forall k \in \mathbb{N}^{*})\left(A_{2k} = \sum_{j=0}^{k-1} D_{2k}^{j}(-1)^{j}(xy)^{j}(x+y)^{2(k-1-j)}\right) \tag{1.8}$$

avec

$$D_{2k}^{0} = D_{2k-1}^{0} + 1 \Longleftrightarrow D_{2k}^{0} = 2k \tag{1.9}$$

et

$$D_{2k}^{k-1} = D_{2k-2}^{k-2} = \cdots = D_{4}^{1} = 2 \tag{1.10}$$

et

$$(\forall j \in \mathbb{N})\,(1 \leq j \leq k-1)\left(D_{2k}^{j} = D_{2k-1}^{j} + D_{2k-2}^{j-1}\right) \tag{1.11}$$

et de même

$$(\forall k \in \mathbb{N}^{*})\left(A_{2k+1} = (x+y)\sum_{j=0}^{k-1} D_{2k+1}^{j}\,(-1)^{j}\,(xy)^{j}\,(x+y)^{2(k-1-j)}\right) \tag{1.12}$$

avec

$$D_{2k+1}^{0} = D_{2k}^{0} + 1 \Longleftrightarrow D_{2k}^{0} = 2k+1 \tag{1.13}$$

et

$$(\forall j \in \mathbb{N})\,(1 \leq j \leq k)\left(D_{2k+1}^{j} = D_{2k}^{j} + D_{2k-1}^{j-1}\right) \tag{1.14}$$

1.4 Valeurs prises par les coefficients D_h^j où $(h \in \mathbb{N})$ et $(h \geq 3)$

Nous avons, ainsi que nous venons de l'établir

$$(\forall h \in \mathbb{N})\,(h \geq 3)\left(D_h^0 = h\right)$$

Prenons à présent $j = 1$. Nous avons

$$D_h^1 = D_{h-1}^1 + D_{h-2}^0$$

Nous pouvons donc écrire

$$\left.\begin{array}{r}
D_h^1 = D_{h-1}^1 + D_{h-2}^0 \\
D_{h-1}^1 = D_{h-2}^1 + D_{h-3}^0 \\
\cdots \\
\cdots \\
\cdots \\
D_5^1 = D_4^1 + D_3^0
\end{array}\right\} \Longrightarrow D_h^1 = \sum_{j=0}^{h-5} D_{h-2-j}^0 + D_4^1$$

Or

$$D_{h-2-j}^0 = h-2-j$$

et, d'après la relation 1.10 établie page 7

$$D_4^1 = 2$$

d'où il vient

$$D_h^1 = \sum_{j=0}^{h-5} (h-2-j) + 2 = ((h-2) + (h-3) + (h-4) + \cdots + 3) + 2$$

et donc

$$2D_h^1 = h\,(h+3)$$

et finalement

$$(\forall h \in \mathbb{N}^{*})\,(h \geq 3)\left(D_h^1 = \frac{h\,(h-3)}{2}\right) \tag{1.15}$$

Clairement
$$(\forall h \in \mathbb{N}^*)\,(h \geq 3)\left(D_h^1 \in \mathbb{N}\right)$$

Par des calculs analogues, nous trouvons pour tout entier $h \geq 3$
$$D_h^2 = \frac{h\,(h-4)\,(h-5)}{6} \tag{1.16}$$
$$D_h^3 = \frac{h\,(h-5)\,(h-6)\,(h-7)}{24} \tag{1.17}$$

Là également
$$(\forall h \in \mathbb{N}^*)\,(h \geq 3)\left(D_h^2 \in \mathbb{N}\right)$$
$$(\forall h \in \mathbb{N}^*)\,(h \geq 3)\left(D_h^3 \in \mathbb{N}\right)$$

Nous remarquons alors que les relations 1.11 et 1.14 établies page 8 ainsi que celles (voir relations 1.15, 1.16 et 1.17) établies pages 8 et 9 nous permettent d'affirmer
$$(\forall h \in \mathbb{N}^*)\,(h \geq 3)\left(\forall j \in \left\{0, 1, \cdots, \frac{h-4}{2}\right\}\right)\left(D_h^j \in \mathbb{N}\right)$$

Supposons maintenant, h étant choisi pair et pour tout $j \in \left\{0, 1, \cdots, \frac{h-2}{2}\right\}$ la formule
$$D_h^j = \frac{h\,(h-(j+2))!}{(j+1)!\,(h-2\,(j+1))!} \tag{1.18}$$
vraie jusqu'au rang h, pour tout entier pair inférieur ou égal à h.

Supposons aussi vraie pour tout $j \in \left\{0, 1, \cdots, \frac{h-4}{2}\right\}$, jusqu'au rang $h-1$, pour tout entier impair inférieur ou égal à $h-1$, la formule
$$D_{h-1}^j = \frac{(h-1)\,((h-1)-(j+2))!}{(j+1)!\,((h-1)-2\,(j+1))!} \tag{1.19}$$

alors
$$D_{h-1}^{j-1} = \frac{(h-1)\,(h-1-(j+1)!)}{j!\,(h-1-2j)!} = \frac{(h-1)\,(h-(j+2)!)}{j!\,(h-1-2j)!}$$

La relation 1.11 établie page 8 nous permet d'écrire

$$D^j_{h+1} = \frac{h\,(h-(j+2))!}{(j+1)!\,(h-2\,(j+1))!} + \frac{(h-1)\,(h-(j+2))!}{j!\,(h-1-2j)!}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$D^j_{h+1} = \frac{(h-(j+2))!}{j!}\left(\frac{h}{(j+1)\,(h-2\,(j+1))!} + \frac{(h-1)}{(h-1-2j)!}\right)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$D^j_{h+1} = \frac{(h-(j+2))!}{j!}\left(\frac{h\,(h-1-2j)+(h-1)\,(j+1)}{(h-1-2j)!\,(j+1)}\right)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$D^j_{h+1} = \frac{(h-(j+2))!}{(j+1)!\,(h-1-2j)!}\,(h\,(h-1)-2jh+(h-1)\,j+(h-1))$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$D^j_{h+1} = \frac{(h-(j+2))!}{(j+1)!\,(h-1-2j)!}\left(h^2-1-(h+1)\,j\right)$$

et enfin

$$D^j_{h+1} = \frac{(h-(j+2))!}{(j+1)!\,(h-1-2j)!}\,(h+1)\,(h-1-j)$$

Nous pouvons donc écrire

$$D^j_{h+1} = \frac{(h+1)\,(h-(j+1))!}{(j+1)!\,(h+1-2\,(j+1))!} \tag{1.20}$$

Nous mènerions les calculs de la même manière en supposant h impair.

Nous vérifions que

$$(\forall h \in \mathbb{N}^*)\,(h \geq 3)\left(D^0_h = h\right)$$

et, en notant $2\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers pairs

$$(\forall h = 2k \in 2\mathbb{N}^*)\,(h \geq 4)\left(D^{k-1}_{2k} = 2\right)$$

Nous avons donc établi au terme de ce raisonnement par récurrence

$$(\forall k \in \mathbb{N}^*)\,(\forall j \in \{0,1,2,\cdots,k-1\})$$
$$\left(D^j_{2k+1} = \frac{(2k+1)\,(2k-(j+1))!}{(j+1)!\,(2k+1-2\,(j+1))!}\right)$$
$$\left(D^j_{2(k+1)} = \frac{2\,(k+1)\,(2\,(k+1)-1-(j+1))!}{(j+1)!\,(2\,(k+1)-2\,(j+1))!}\right) \tag{1.21}$$

Remarquons que pour tout entier h

$$h-2\,(j+1)+(j+1) = h-(j+1)$$

Nous pouvons donc écrire

$$D^j_h = \frac{h\,(h-(j+1))!}{(h-(j+1))\,(j+1)!\,(h-2\,(j+1))!}$$

et aussi

$$D^j_h = \frac{h}{h-(j+1)}C^{j+1}_{h-(j+1)}$$

1.5 Etude sur les coefficients D_h^j

Pour les entiers $h = 2k + 1$ impairs qui suivent, nous vérifions par le calcul les relations

$$k = 1 \Longleftrightarrow h = 2k + 1 = 3$$
$$D_3^0 = 3C_0^0$$

$$k = 2 \Longleftrightarrow h = 2k + 1 = 5$$
$$D_5^0 = 5C_1^0$$
$$D_5^1 = 5C_1^1$$

$$k = 3 \Longleftrightarrow h = 2k + 1 = 7$$
$$D_7^0 = 7C_2^0$$
$$D_7^1 = 7C_2^1$$
$$D_7^2 = 7C_2^2$$

$$k = 4 \Longleftrightarrow h = 2k + 1 = 9$$
$$D_9^0 = 9C_3^0$$
$$D_9^1 = 9C_3^1$$
$$D_9^2 = 9C_3^2 + 3C_0^0$$
$$D_9^1 = 9C_3^3$$

$$k = 5 \Longleftrightarrow h = 2k + 1 = 11$$
$$D_{11}^0 = 11C_4^0$$
$$D_{11}^1 = 11C_4^1$$
$$D_{11}^2 = 11\left(C_4^2 + C_1^0\right)$$
$$D_{11}^3 = 11\left(C_4^3 + C_1^1\right)$$
$$D_{11}^4 = 11C_4^4$$

$$k = 6 \Longleftrightarrow h = 2k + 1 = 13$$
$$D_{13}^0 = 13C_5^0$$
$$D_{13}^1 = 13C_5^1$$
$$D_{13}^2 = 13\left(C_5^2 + 2C_2^0\right)$$
$$D_{13}^3 = 13\left(C_5^3 + 2C_2^1\right)$$
$$D_{13}^4 = 13\left(C_5^4 + 2C_2^2\right)$$
$$D_{13}^5 = 13C_5^5$$

$k = 7 \Longleftrightarrow h = 2k + 1 = 15$

$$D_{15}^{0} = 15C_{6}^{0}$$
$$D_{15}^{1} = 15C_{6}^{1}$$
$$D_{15}^{2} = 15\left(C_{6}^{2} + 3C_{3}^{0}\right)$$
$$D_{15}^{3} = 15\left(C_{6}^{3} + 3C_{3}^{1}\right)$$
$$D_{15}^{4} = 15\left(C_{6}^{4} + 3C_{3}^{2} + 3C_{0}^{0}\right)$$
$$D_{15}^{5} = 15\left(C_{6}^{5} + 3C_{3}^{3}\right)$$
$$D_{15}^{6} = 15C_{6}^{6}$$

$k = 8 \Longleftrightarrow h = 2k + 1 = 17$

$$D_{17}^{0} = 17C_{7}^{0}$$
$$D_{17}^{1} = 17C_{7}^{1}$$
$$D_{17}^{2} = 17\left(C_{7}^{2} + 5C_{4}^{0}\right)$$
$$D_{17}^{3} = 17\left(C_{7}^{3} + 5C_{4}^{1}\right)$$
$$D_{17}^{4} = 17\left(C_{7}^{4} + 5C_{4}^{2} + C_{0}^{0}\right)$$
$$D_{17}^{5} = 17\left(C_{7}^{5} + 5C_{4}^{3} + C_{1}^{1}\right)$$
$$D_{17}^{6} = 17\left(C_{7}^{6} + 5C_{4}^{4}\right)$$
$$D_{17}^{7} = 17C_{7}^{7}$$

$k = 9 \Longleftrightarrow h = 2k + 1 = 19$

$$D_{19}^{0} = 19C_{8}^{0}$$
$$D_{19}^{1} = 19C_{8}^{1}$$
$$D_{19}^{2} = 19\left(C_{8}^{2} + 7C_{5}^{0}\right)$$
$$D_{19}^{3} = 19\left(C_{8}^{3} + 7C_{5}^{1}\right)$$
$$D_{19}^{4} = 19\left(C_{8}^{4} + 7C_{5}^{2} + 3C_{2}^{0}\right)$$
$$D_{19}^{5} = 19\left(C_{8}^{5} + 7C_{5}^{3} + 3C_{2}^{1}\right)$$
$$D_{19}^{5} = 19\left(C_{8}^{6} + 7C_{5}^{4} + 2C_{2}^{2}\right)$$
$$D_{19}^{6} = 19\left(C_{8}^{7} + 7C_{5}^{5}\right)$$
$$D_{19}^{8} = 19C_{8}^{8}$$

$k = 10 \Longleftrightarrow h = 2k + 1 = 21$

$$
\begin{aligned}
D_{21}^{0} &= 21C_{9}^{0} \\
D_{21}^{1} &= 21C_{9}^{1} \\
D_{21}^{2} &= 21\left(C_{9}^{2} + 19C_{6}^{0}\right) \\
D_{21}^{3} &= 21\left(C_{9}^{3} + 19C_{6}^{1}\right) \\
D_{21}^{4} &= 21\left(C_{9}^{4} + 19C_{6}^{2} + 14C_{3}^{0}\right) \\
D_{21}^{5} &= 21\left(C_{9}^{5} + 19C_{6}^{3} + 14C_{3}^{1}\right) \\
D_{21}^{6} &= 21\left(C_{9}^{6} + 19C_{6}^{4} + 14C_{3}^{2} + 3C_{0}^{0}\right) \\
D_{21}^{7} &= 21\left(C_{9}^{7} + 19C_{6}^{5} + 14C_{3}^{3}\right) \\
D_{21}^{8} &= 21\left(C_{9}^{7} + 19C_{6}^{6}\right) \\
D_{21}^{9} &= 21C_{9}^{9}
\end{aligned}
$$

Nous sommes amenés à supposer que pour tout entier $2k+1$ impair, supérieur ou égal à 3, chaque coefficient D_{2k+1}^{j} peut s'exprimer comme suit

$$D_{2k+1}^{j} = \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k}{3} \rfloor} F_{2k+1}^{l} C_{k-1-2l}^{j-2l}$$

Pour démontrer la validité de cette formule pour tout entier k non nul, nous allons chercher à expliciter, dans la mesure du possible, le coefficients F_{2k+1}^{l} en fonction de k et de l.

Pour une entier k quelconque, nous vérifions les relations

$$D_{2k+1}^{0} = (2k+1)\, C_{k-1}^{0}$$

$$D_{2k+1}^{1} = (2k+1)\, C_{k-1}^{1}$$

Nous pouvons toujours écrire avec $k \geq 4$

$$D_{2k+1}^{2} = (2k+1)\, C_{k-1}^{2} + \left(D_{2k+1}^{2} - (2k+1)\, C_{k-1}^{2}\right) C_{k-4}^{0}$$

Mais, en accord avec les relations 1.3 et 1.21 établies pages 2 et 10

$$D_{2k+1}^{2} - (2k+1)\, C_{k-1}^{2} = (2k+1)\left(\frac{(2k-3)!}{3!\,(2k+1-6)!} - \frac{(k-1)!}{2!\,(k-3)!}\right)$$

soit

$$D_{2k+1}^{2} - (2k+1)\, C_{k-1}^{2} = (2k+1)\left(\frac{(2k-3)!}{3!\,(2k-5)!} - \frac{(k-1)!}{2!\,(k-3)!}\right)$$

et

$$D_{2k+1}^{2} - (2k+1)\, C_{k-1}^{2} = (2k+1)\left(\frac{(2k-3)\,(2k-4)}{3!} - \frac{(k-1)\,(k-2)}{2!}\right)$$

et

$$D_{2k+1}^{2} - (2k+1)\, C_{k-1}^{2} = (2k+1)\left(\frac{(2k-3)\,(k-2)}{3} - \frac{(k-1)\,(k-2)}{2}\right)$$

soit encore

$$D_{2k+1}^2 - (2k+1)\, C_{k-1}^2 = (2k+1) \left(\frac{2\,(2k-3)\,(k-2) - 3\,(k-1)\,(k-2)}{6} \right)$$

et enfin

$$D_{2k+1}^2 - (2k+1)\, C_{k-1}^2 = \frac{(2k+1)\,(k-2)\,(k-3)}{6}$$

Nous posons

$$F_{2k+1}^1 = D_{2k+1}^2 - (2k+1)\, C_{k-1}^2 = \frac{(2k+1)\,(k-2)\,(k-3)}{3!}$$

De la même façon, nous trouverions

$$D_{2k+1}^3 = (2k+1) \left(C_{k-1}^3 + F_{2k+1}^1 C_{k-4}^1 \right)$$

et

$$D_{2k+1}^4 = (2k+1) \left(C_{k-1}^4 + F_{2k+1}^1 C_{k-4}^2 + F_{2k+1}^2 C_{k-7}^0 \right)$$

ce qui nous donne

$$F_{2k+1}^2 = \left(\left(D_{2k+1}^4 - (2k+1)\, C_{k-1}^4 \right) - \left(D_{2k+1}^2 - (2k+1)\, C_{k-1}^2 \right) C_{k-4}^2 \right)$$

Par des calculs similaires aux précédents, les coefficients D_{2k+1}^j et C_{k-j}^l étant explicités, nous trouvons

$$F_{2k+1}^2 = \frac{(2k+1)\,(k-3)\,(k-4)\,(k-5)\,(k-6)}{5!}$$

Nous sommes alors amenés à supposer vraie, pour tout entier naturel $k \geq 1$, l'égalité

$$F_{2k+1}^l = \frac{(2k+1)\,(k-1-l)!}{(2l+1)!\,(k-1-3l)!} \tag{1.22}$$

avec l'entier naturel l tel que

$$0 \leq l \leq \lfloor \frac{k}{3} \rfloor$$

Nous effectuons maintenant la différence des coefficents F_{2k+1}^l et F_{2k-1}^l

$$F_{2k+1}^l - F_{2k-1}^l = \frac{(2k+1)\,(k-1-l)!}{(2l+1)!\,(k-1-3l)!} - \frac{(2k-1)\,(k-2-l)!}{(2l+1)!\,(k-2-3l)!}$$

Il vient

$$F_{2k+1}^l - F_{2k-1}^l = \frac{(k-2-l)!}{(2l+1)!\,(k-2-3l)!} \left(\frac{(2k+1)\,(k-1-l) - (2k-1)\,(k-1-3l)}{(k-1-3l)} \right)$$

et

$$F_{2k+1}^l - F_{2k-1}^l = \frac{(k-2-l)!}{(2l+1)!\,(k-1-3l)!} \left((2k+1)\,(k-1-l) - (2k-1)\,(k-1-3l) \right)$$

soit encore

$$F_{2k+1}^l - F_{2k-1}^l = \frac{(k-2-l)!}{(2l+1)!\,(k-1-3l)!} \left(2\,(2l+1)\,(k-1) \right)$$

et finalement
$$F_{2k+1}^{l}-F_{2k-1}^{l}=\frac{2\,(k-1)\,(k-2-l)!}{(2l)!\,(k-1-3l)!} \tag{1.23}$$
Montrons maintenant par récurrence l'existence de la relation
$$(\forall k\in\mathbb{N}^{*})\,(k\geq 1)\,(\forall j\in\mathbb{N})\,(0\leq j\leq k-1)\left(D_{2k+1}^{j}=\sum_{l=0}^{\lfloor\frac{k}{3}\rfloor}F_{2k+1}^{l}C_{k-1-3l}^{j-2l}\right)$$
où chaque coefficient F_{2k+1}^{l} s'exprime par la formule 1.22 établie page 14.

Supposons vraie jusqu'au rang $2k-1$, pour tout entier naturel $j\leq k-2$, la relation
$$D_{2k-1}^{j}=\sum_{l=0}^{\lfloor\frac{k-1}{3}\rfloor}F_{2k-1}^{l}C_{k-2-3l}^{j-2l}$$
avec
$$F_{2k-1}^{l}=\frac{(2k-1)\,(k-2-l)!}{(2l+1)!\,(k-2-3l)!}$$
Nous effectuons à présent
$$D_{2k-1}^{j}-D_{2k-3}^{j-1}=D_{2k-2}^{j}$$
soit encore
$$D_{2k-2}^{j}=\sum_{l=0}^{\lfloor\frac{k-1}{3}\rfloor}F_{2k-1}^{l}C_{k-2-3l}^{j-2l}-\sum_{l=0}^{\lfloor\frac{k-2}{3}\rfloor}F_{2k-3}^{l}C_{k-3-2l}^{j-2l-1}$$
Deux cas se présentent alors.

Cas 1 : $\lfloor\frac{k-1}{3}\rfloor=\lfloor\frac{k-2}{3}\rfloor=m$

Ce cas équivaut à $k\equiv 0\;(3)$ ou $k\equiv 2\;(3)$.

Rappelons que
$$\left(C_{k-2-3l}^{j-2l}=C_{k-3-3l}^{j-2l-1}+C_{k-3-3l}^{j-2l}\right)\Longleftrightarrow\left(C_{k-3-3l}^{j-2l-1}=C_{k-2-3l}^{j-2l}-C_{k-3-3l}^{j-2l}\right)$$
Nous avons alors
$$D_{2k-2}^{j}=\sum_{l=0}^{m}\left(F_{2k-1}^{l}C_{k-2-3l}^{j-2l}-F_{2k-3}^{l}C_{k-3-3l}^{j-2l-1}\right)$$
ce qui équivaut à
$$D_{2k-2}^{j}=\sum_{l=0}^{m}\left(F_{2k-1}^{l}C_{k-2-3l}^{j-2l}-F_{2k-3}^{l}\left(C_{k-2-3l}^{j-2l}-C_{k-3-3l}^{j-2l}\right)\right)$$
et
$$D_{2k-2}^{j}=\sum_{l=0}^{m}\left(\left(F_{2k-1}^{l}-F_{2k-3}^{l}\right)C_{k-2-3l}^{j-2l}+F_{2k-3}^{l}C_{k-3-3l}^{j-2l}\right) \tag{1.24}$$
avec $m=\lfloor\frac{k-1}{3}\rfloor=\lfloor\frac{k-2}{3}\rfloor$

Cas 2 : $\lfloor \frac{k-1}{3} \rfloor = \lfloor \frac{k-2}{3} \rfloor + 1 = m + 1$

Ce cas équivaut à $k \equiv 1 \ (3)$.

Nous avons alors

$$D_{2k-2}^{j} = F_{2k-1}^{m+1} C_{k-2-3(m+1)}^{j-2(m+1)} + \sum_{l=0}^{m} \left(\left(\left(F_{2k-1}^{l} - F_{2k-3}^{l} \right) C_{k-2-3l}^{j-2l} + F_{2k-3}^{l} C_{k-3-2l}^{j-2l} \right) \right.$$

or

$$(k-1 = 3m+1) \Longleftrightarrow (k-2 < 3m+1 < 3(m+1))$$

et donc

$$D_{2k-2}^{j} = \sum_{l=0}^{m} \left(\left(\left(F_{2k-1}^{l} - F_{2k-3}^{l} \right) C_{k-2-3l}^{j-2l} + F_{2k-3}^{l} C_{k-3-2l}^{j-2l} \right) \right. \qquad (1.25)$$

avec $m = \lfloor \frac{k-1}{3} \rfloor - 1 = \lfloor \frac{k-2}{3} \rfloor$.

Ces deux cas étant revus, nous remarquons alors que pour chacun d'eux

$$\sum_{l=0}^{m} F_{2k-3}^{l} C_{k-3-3l}^{j-2l} = D_{2k-3}^{j}$$

d'où il vient

$$D_{2k-2}^{j} - D_{2k-3}^{j} = D_{2k-4}^{j-1}$$

et finalement nous obtenons l'égalité

$$D_{2k-4}^{j-1} = \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k-2}{3} \rfloor} F_{2k-4}^{l} C_{k-2-3l}^{j-2l} \qquad (1.26)$$

avec, en accord avec la relation 1.23 établie page 15

$$F_{2k-4}^{l} = F_{2k-1}^{l} - F_{2k-3}^{l}$$

Il nous reste à établir la validité de l'égalité 1.26 lorsque $k \geq 4$ décrit $\mathbb{N}$. Nous nous assurons d'abord par un calcul simple qu'elle est en effet vérifiée lorsque k prend successivement les valeurs 4, 5 et $6 \cdots$, alors que j décrit son intervalle de définition.

Nous supposons alors que cette égalité est vérifiée jusqu'au rang $2k$, pour tout $j \leq (k-1)$, soit

$$D_{2k}^{j} = \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k}{3} \rfloor} F_{2k}^{l} C_{k-3l}^{j+1-2l}$$

Nous pouvons remarquer que les calculs faits pour aboutir à la formule donnant $D_{h=2k}^{j}$ en fonction des coefficients F_{2k}^{l} et des coefficients du binôme C_{k-3l}^{j+1-2l} sont généralisables à une valeur quelconque de h dans $\mathbb{N}$. Il nous suffit d'établir la relation de récurrence sur les coefficients d'indices h impairs pour obtenir un r'esultat valable quelque soit la parité de cet indice h.

En reprenant l'hypothèse de départ, portant sur les coefficients d'indices impairs, et en utilisant ce que nous venons d'établir, nous vérifions

$$D_{2k+1}^{j} = D_{2k}^{j} + D_{2k-1}^{j-1}$$

avec

$$D_{2k}^{j} = \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k}{3} \rfloor} F_{2k}^{l} C_{k-3l}^{j+1-2l}$$

et

$$D_{2k-1}^{j-1} = \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k-1}{3} \rfloor} F_{2k-1}^{l} C_{k-2-3l}^{j-2l}$$

D'après le calculs que nous venons d'effectuer pages 15 et 16, nous avons

$$D_{2k}^{j} = \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k}{3} \rfloor = m} F_{2k-2}^{l} C_{k-1-3l}^{j-2l} + F_{2k-1}^{l} C_{k-2-3l}^{j-2l}$$

$$\Longleftrightarrow D_{2k}^{j} = \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k}{3} \rfloor = m} \left(F_{2k+1}^{l} - F_{2k-1}^{l}\right) C_{k-1-3l}^{j-2l} + F_{2k-1}^{l} C_{k-2-3l}^{j-2l}$$

$$\Longleftrightarrow D_{2k}^{j} = \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k}{3} \rfloor = m} F_{2k+1}^{l} C_{k-1-3l}^{j-2l} - \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k}{3} \rfloor = m} F_{2k-1}^{l} C_{k-1-3l}^{j-2l-1}$$

$$\Longleftrightarrow D_{2k}^{j} = D_{2k+1}^{j} - D_{2k-1}^{j-1}$$

Ce résulat est bien en accord avec l'égalité 1.14 établie page 8.

Connaissant F_{2k-2}^{l} et F_{2k-1}^{l}, exprimés en fonction de l et de k, nous pouvons calculer F_{2k+1}^{l}, en allant en sens inverse du calcul nous ayant donné F_{2k-2}^{l} puis F_{2k-4}^{l}. Nous trouvons donc

$$D_{2k+1}^{j} = \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k}{3} \rfloor} F_{2k+1}^{l} C_{k-1-3l}^{j-2l}$$

avec

$$F_{2k+1}^{l} = \frac{(2k+1)\,(k-1-l)!}{(2l+1)!\,(k-1-3l)!}$$

La relation de récurrence est donc établie pour tous les coefficients D_{h}^{j} d'indice h pair ou impair.

Récapitulons maintenant l'ensemble des résultats obtenus au cours des pages précédentes (voir équations 1.8 et 1.12 page 7)

$$(\forall n \in \mathbb{N})\,(n \geq 3) \left((x^n + y^n) = x^n + y^n + xy \sum_{j=1}^{n-2} A_n\,(x, y) \right)$$

avec pour $n = 2k$ (voir équation 1.8 page 7)

$$A_{2k}\,(x, y) = \sum_{j=0}^{k-1} D_{2k}^{j}\,(-1)^{j}\,(xy)^{j}\,(x+y)^{2(k-1-j)}$$

et

$$(\forall k \in \mathbb{N}^*)\,(k > 1)\,(\forall j \in \mathbb{N})\,(j \leq k-1)\left(D_{2k}^{j} = \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k}{3} \rfloor} F_{2k}^{l} C_{k-3l}^{j+1-2l}\right)$$

et

$$F_{2k}^{l} = \frac{2k\,(k-1-l)!}{(2l)!\,(k-3l)!}$$

et pour $n = 2k+1$ (voir équation 1.12 page 8)

$$A_{2k+1}(x,y) = (x+y)\sum_{j=0}^{k-1} D_{2k+1}^{j}\,(-1)^{j}\,(xy)^{j}\,(x+y)^{2(k-1-j)}$$

et

$$(\forall k \in \mathbb{N}^*)\,(\forall j \in \mathbb{N})\,(j \leq k-1)\left(D_{2k+1}^{j} = \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k}{3} \rfloor} F_{2k+1}^{l} C_{k-1-3l}^{j-2l}\right)$$

et

$$F_{2k+1}^{l} = \frac{(2k+1)\,(k-1-l)!}{(2l+1)!\,(k-1-3l)!}$$

1.6 Etude de $A_{2k+1}(x,y)$ où $k \in \mathbb{N}^*$

Nous allons voir dans ce paragraphe qu'il est possible de poursuivre la factorisation de la quantité $A_{2k+1}(x,y)$ En utilisant les derniers résultats, nous pouvons écrire

$$A_{2k+1}(x,y) = \sum_{j=0}^{k-1}\sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k}{3} \rfloor} F_{2k+1}^{l} C_{k-1-3l}^{j-2l}\,(-1)^{j}\,(xy)^{j}\,(x+y)^{2(k-1-j)}$$

Nous avons alors, pour chaque k, et pour tout j et tout l

$$\begin{aligned}
&F_{2k+1}^{l} C_{k-1-3l}^{j-2l}\,(-1)^{j}\,(xy)^{j}\,(x+y)^{2(k-1-l)} \\
&\quad = F_{2k+1}^{l} C_{k-1-3l}^{j-2l}\,(-1)^{j-2l+2l}\,(xy)^{j-2l+2l}\,(x+y)^{2(k-1-3l+3l-(j-2l)-2l)} \\
&= \left(F_{2k+1}^{l} C_{k-1-3l}^{j-2l}\,(-1)^{j-2l}\,(xy)^{j-2l}\,(x+y)^{2(k-1-3l-(j-2l))}\right)(-1)^{2l}\,(xy)^{2l}\,(x+y)^{2l}
\end{aligned}$$

$A_{2k+1}(x.y)$ peut donc s'écrire de la façon suivante

$$\begin{aligned}
&A_{2k+1}(x.y) \\
&= (x+y) \\
&\sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k}{3} \rfloor} F_{2k+1}^{l}\,(-1)^{2l}\,(x+y)^{2j} \\
&\sum_{j=0}^{k-1} C_{k-1-3l}^{j-2l}\,(-1)^{j-2l}\,(xy)^{j-2l}\,(x+y)^{2(k-1-3l-(j-2l))}
\end{aligned}$$

Si j varie de 0 à $k-1$, alors $j-2l$ varie de 0 à $k-1-2l$, et comme nécessairement

$$j - 2l \leq k - 1 - 3l$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}
&A_{2k+1}(x.y) \\
&= (x+y) \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k}{3} \rfloor} F_{2k+1}^{l} (-1)^{2l} (x+y)^{2j} \sum_{j=0}^{k-1-3l} C_{k-1-3l}^{j} (-1)^{j} (xy)^{j} (x+y)^{2(k-1-3l-j)}
\end{aligned}$$

mais

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{k-1-3l} C_{k-1-3l}^{j} (-1)^{j} (xy)^{j} (x+y)^{2(k-1-3l-j)} \\
&\qquad = \left((x+y)^2 - xy\right)^{k-1-3l} \\
&\qquad\qquad = \left(x^2 + xy + y^2\right)^{k-1-3l}
\end{aligned}$$

et finalement

$$A_{2k+1}(x.y) = (x+y) \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k}{3} \rfloor} F_{2k+1}^{l} (-1)^{2l} (x+y)^{2j} \left(x^2 + xy + y^2\right)^{k-1-3l}$$

Si de plus, nous supposons que $2k+1$ est un entier premier strictement supérieur à 3, alors

$$(2k + 1 \not\equiv 0 \quad (3)) \Longleftrightarrow (k \not\equiv 1 \quad (3))$$

Par conséquent, $k - 1 - 3l$ ne s'annule pour aucune valeur de l et $A_{2k+1}(x, y)$ est divisible par $\left(x^2 + xy + y^2\right)$.

Finalement, en notant $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers, pour tout $n \in \mathbb{P} - \{2, 3\}$

$$\begin{aligned}
&A_n(x,y) = \\
&(x+y)\left(x^2+xy+y^2\right) \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k}{3} \rfloor} F_{2k+1}^{l} (-1)^{2l} (x+y)^{2j} \left(x^2+xy+y^2\right)^{k-2-3l} \qquad (1.27)
\end{aligned}$$

1.7 Différentes expressions de la formule du binôme.

Nous arrivons à la fin de cette étude, dont le but était de reformuler la formule du binôme. Ainsi que présenté (voir équation 1.2 en page 2) et établi (voir équation 1.1 en page 2), nous avons

$$\begin{aligned}
(x+y)^n &= \sum_{j=0}^{n} C_n^j x^{n-j} y^j \\
&= x^n + y^n + \sum_{j=1}^{n-1} C_n^j x^{n-j} y^j \\
&= x^n + y^n + xy \sum_{j=0}^{n-2} C_n^{j+1} x^{n-2-j} y^j \\
&= x^n + y^n + xy \sum_{j=0}^{n-2} (x+y)^{n-2-j} \left(x^j + y^j\right)
\end{aligned}$$

De plus, selon que l'entier n est pair,impair ou premier impair, la formule du binôme peut également être explicitée comme suit

$n = 2k$ **pair**

$$(x+y)^{2k} = x^{2k} + y^{2k} + xy \sum_{j=0}^{k-1} D_{2k}^j (-1)^j (xy)^j (x+y)^{2(k-1-j)}$$

avec

$$D_{2k}^j = \frac{2k\,(2k-1-(j+1))!}{(j+1)!\,(2k-2\,(j+1))!}$$

ainsi qu'établi plus haut (voir équation 1.8 page 7).

$n = 2k+1$ **impair**

$$(x+y)^{2k+1} = x^{2k+1} + y^{2k+1} + xy\,(x+y) \sum_{j=0}^{k-1} D_{2k+1}^j (-1)^j (xy)^j (x+y)^{2(k-1-j)}$$

avec

$$D_{2k+1}^j = \frac{(2k+1)\,(2k-(j+1))!}{(j+1)!\,(2k+1-2\,(j+1))!}$$

ainsi qu'établi plus haut (voir équation 1.12 en page 8).

$n > 3$ **premier**

$$\begin{gathered}
(x+y)^n = x^n + y^n \\
+ \\
xy\,(x+y)\left(x^2+xy+y^2\right) \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k}{3} \rfloor} F_{2k+1}^l (-1)^{2l} (x+y)^{2j} \left(x^2+xy+y^2\right)^{k-2-3l}
\end{gathered} \tag{1.28}$$

avec

$$F_{2k+1}^l = \frac{(2k+1)\,(k-1-l)!}{(2l+1)!\,(k-1-3l)!}$$

ainsi qu'établi plus haut (voir équation 1.27 en page 19).

L'exposé de ces résultats termine cette étude.