全空間におけるＮＳＩＶＰの時間大域可解性

概要

全空間における非圧縮性ＮＳＩＶＰの時間大域可解性を、時間変換解析に基き、証明する。

序論

ＮＳｅｑに関しては、流体力学の基礎方程式として、ナビエ[1], ストークス[2] により確立された。以降、長らくその可解性が追究されてきたが、その非線形性に基く困難のため、解析対象を非圧縮性流体に限定しても、１７０年を経過するまで可解性に関する十分な結果が知られなかった。

非圧縮性流体に対するＮＳＩＶＰに関しては、ルレイ[3], ホップ[4] あるいはキセレフ-ラジゼンスカヤ[5], 伊藤[6], 加藤-藤田[7] 等に始まり、加藤[8], 儀我-宮川[9] により拡充されて発展した議論に基き、時間局所可解性、あるいは小値性初期値に対する時間大域可解性が、適切性を含めて知られている。しかしながら、小値性を想定しない初期値に対する時間大域可解性は不明であった。

本論文では、全空間における小値性を想定しない初期値に対するＮＳＩＶＰの時間大域可解性を、時間変換解析に基き、証明する。なお、周期系におけるＮＳＩＶＰに関しても、時間大域可解性が示されており、その証明は別論文[11] にて示される。

本論文は、ＣＭＩの全空間版のＮＳＩＶＰに関する問題[10] に対する肯定的回答を与え、また同様の結果の広範な初期条件に対する成立を示す。

概観

本論では $n_{\geq 3}$ 次元全空間 $\boldsymbol{R}^n$ におけるＮＳＩＶＰが、初期値の大きさに依らず時間大域的古典解を持つことを示す。時間大域解は、一意性, 正則性, 初期値連続依存を有し、この意味で適切である。また、解のノルムは減衰性上限関数を持ち、その減衰特性は初期値ノルムに応じて与えられる。

本論では、時間局所可解性解析と先験的評価に基き時間大域可解性解析を行っており、この観点で本論は時間大域可解性解析の典型的形態に基くものとなっている。但し、ＮＳＩＶＰに対する積分方程式とヤングの不等式に依るルベーグ空間ノルムの基本的な評価による解析には限界があり、この問題を乗越えるため、本論では、時間変数を変換した上で評価を行い、然る後に逆変換する形での解析を行う。この時間変換解析によりノルム上限評価の範囲の拡大が可能となる。

時間局所可解性解析では、初期値の $\boldsymbol{L}^Q{}_{,Q\in(n,\infty)}$ への帰属に基き解 $\boldsymbol{u}_{\in \boldsymbol{L}^Q_{[0,T_M]}}$ の存在を示した上で、初期値の $\boldsymbol{L}^2 \cap \boldsymbol{L}^q{}_{,q\in(n,\infty]}$ への帰属に基き、解の $\boldsymbol{L}^2_{[0,T_M]} \cap \boldsymbol{L}^q_{[0,T_M]}$ や $\boldsymbol{L}^r_{t\,,t\in(0,T_M],r\in(q,\infty]}$ への帰属並びに解の偏導関数の $\boldsymbol{L}^r_{t\,,t\in(0,T_M],r\in[2,\infty]}$ への帰属を示す。次いで、先験的にエネルギー非増加性を示し、これに基き解やその偏導関数の $\boldsymbol{L}^r{}_{,r\in[2,\infty]}$ ノルムが減少型上限を持つことを示す。そして、時間局所可解性と先験的評価に基き、時間大域可解性を示す。

時間変換解析は (時間大域可解性の証明の段階に限らず) 上記過程で随時 (しばしば) 利用される。

１. 準備

本論では以下により定義される関数空間を扱う。

定義１ (関数空間)

本論では、対象領域を３次元以上の全空間領域 $\boldsymbol{R}^n{}_{;n\in \boldsymbol{N}_{\geq 3}}$ とし、空間関数に対するルベーグ空間 $\boldsymbol{L}^q(\boldsymbol{R}^n)_{,\,q\in[1,\infty]}$ を導入する。

時間点 $t_{\in[0,\infty)}$ や時間区間 $TI_{\subseteq[0,\infty]}$ と $\boldsymbol{L}^q(\boldsymbol{R}^n)$ に対して、関数空間 $\boldsymbol{L}^q_t(\boldsymbol{R}^n), \boldsymbol{L}^q_{TI}(\boldsymbol{R}^n)$ を以下に依り導入する。

但し、時間空間関数 $\boldsymbol{\varphi}$ に対して時間変数 t を指定して得られる空間関数を $\boldsymbol{\varphi}_t$ とする。

$$\|\boldsymbol{\varphi}\|_{\boldsymbol{L}^q_t(\boldsymbol{R}^n)} = \|\boldsymbol{\varphi}_t\|_{\boldsymbol{L}^q(\boldsymbol{R}^n)}\ ,\ \boldsymbol{L}^q_t(\boldsymbol{R}^n) = \left\{\boldsymbol{\varphi}\,\middle|\,\|\boldsymbol{\varphi}\|_{\boldsymbol{L}^q_t(\boldsymbol{R}^n)} < \infty\right\}$$

$$\|\boldsymbol{\varphi}\|_{\boldsymbol{L}^q_{TI}(\boldsymbol{R}^n)} = \sup_{t\in TI}\|\boldsymbol{\varphi}_t\|_{\boldsymbol{L}^q(\boldsymbol{R}^n)}\ ,\ \boldsymbol{L}^q_{TI}(\boldsymbol{R}^n) = \left\{\boldsymbol{\varphi}\,\middle|\,\|\boldsymbol{\varphi}\|_{\boldsymbol{L}^q_{TI}(\boldsymbol{R}^n)} < \infty\right\}$$

以上で定義された関数空間 $\boldsymbol{L}^q(\boldsymbol{R}^n)$,$\boldsymbol{L}^q_t(\boldsymbol{R}^n)$,$\boldsymbol{L}^q_{TI}(\boldsymbol{R}^n)_{,q\in[1,\infty]}$ はバナッハ空間である。

以降、これらを各々単に $\boldsymbol{L}^q, \boldsymbol{L}_t^q, \boldsymbol{L}_{TI}^q$ のように表記する。

また、関数空間 $\boldsymbol{L}^{[p,q]}, \boldsymbol{L}^{(p,q]}$ を以下に依り定義する。但し $1 \le p < q \le \infty$ とする。

$$\boldsymbol{L}^{[p,q]} = \bigcap_{r \in [p,q]} \boldsymbol{L}^r \,,\, \boldsymbol{L}^{(p,q]} = \bigcap_{r \in (p,q]} \boldsymbol{L}^r \qquad []$$

定義２ (多重指数)

本論では、多重指数 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)_{\in(\{0\}\cup\boldsymbol{N})^n}$ の大きさを $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ に依り定義する。そして、α に対応する空間変数冪積を $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$ に依り、空間偏微分を $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n}$ に依り、定義する。

定義３ (ヘルムホルツ分解)

関数 $\boldsymbol{\varphi}$ に対して以下を満たす関数 $\mathcal{P}\boldsymbol{\varphi}, \overline{\mathcal{P}}\boldsymbol{\varphi}$ が存在する場合、$\mathcal{P}\boldsymbol{\varphi}$ を $\boldsymbol{\varphi}$ の非発散成分,$\overline{\mathcal{P}}\boldsymbol{\varphi}$ を $\boldsymbol{\varphi}$ の非回転成分と称し、$\boldsymbol{\varphi}$ のこれらの成分への分解をヘルムホルツ分解と称する。

$$\boldsymbol{\varphi} = \mathcal{P}\boldsymbol{\varphi} + \overline{\mathcal{P}}\boldsymbol{\varphi} \,,\, \boldsymbol{\partial}\cdot\mathcal{P}\boldsymbol{\varphi} = 0 \,,\, (\mathcal{P}\boldsymbol{\varphi}, \overline{\mathcal{P}}\boldsymbol{\varphi})_{\boldsymbol{L}^2} = 0$$

関数 $\boldsymbol{\varphi}$ に対してこれに収束するヘルムホルツ分解可能周期関数列 $\{\boldsymbol{\varphi}_k\}_{k\in\boldsymbol{N}}, \boldsymbol{\varphi}_k = \mathcal{P}\boldsymbol{\varphi}_k + \overline{\mathcal{P}}\boldsymbol{\varphi}_k$ が存在し、成分組列 $\{(\mathcal{P}\boldsymbol{\varphi}_k, \overline{\mathcal{P}}\boldsymbol{\varphi}_k)\}_{k\in\boldsymbol{N}}$ が極限 $(\mathcal{P}\boldsymbol{\varphi}, \overline{\mathcal{P}}\boldsymbol{\varphi})$ を持つ場合、その各成分を $\boldsymbol{\varphi}$ の非発散成分, 非回転成分と称し、$\boldsymbol{\varphi}$ のこれらの成分への分解をヘルムホルツ分解と称する。

一般に、(上記の $\boldsymbol{L}^q, \boldsymbol{L}_{TI}^q$ 等の) 関数空間 $\boldsymbol{X}$ に対し、関数空間 $\mathcal{P}\boldsymbol{X}$ を以下により定義する。

$$\mathcal{P}\boldsymbol{X} = \{\, \boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{X} \,|\, \boldsymbol{\varphi} = \mathcal{P}\boldsymbol{\varphi} \,\} \qquad []$$

定義４ (熱核)

本論では、熱方程式 $\partial_t f - \nu\triangle f = 0$ に対応する熱核 K を以下に依り定義する。

$$K(t, \boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}^n} \exp\Big(-\frac{\boldsymbol{x}^2}{4\nu t} \Big)$$

本論は次に定義されるＮＳＩＶＰの可解性や解特性の解析を主目的とする。この解析の過程では、これに対応する以下に定義される積分方程式の解析が行われる。

定義５ (初期値)

ここでは、以下を満たす初期値関数 $\boldsymbol{a}$ を想定する。但し、$q_{\in(n,\infty]}$; $m \ge 2$ とする。

$$(1.1) \quad \boldsymbol{a} \in \mathcal{P}\boldsymbol{L}^{[2,q]} \,,\, \partial^\alpha \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{L}^{[2,q]}{}_{,\, |\alpha|\le m}$$

定義６ (方程式)

本論では以下の偏微分方程式の初期値問題 (ＮＳＩＶＰ) を扱う。

$$(1.2) \quad \boldsymbol{u} \in \mathcal{P}\boldsymbol{L}^{[2,q]}_{(0,\infty)}$$

$$\partial_t \boldsymbol{u} - \nu\triangle\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\partial})\boldsymbol{u} + \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\partial}p = \boldsymbol{0} \qquad {}_{,(t,\boldsymbol{x})\in(0,\infty)\times\boldsymbol{R}^n}$$

$$\boldsymbol{u}(0, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) \qquad {}_{,\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n}$$

次の積分方程式は、解の偏導関数が存在する場合、初期値問題 (1.2) と同値となる。

$$(1.3) \quad \boldsymbol{u}_t = K_t * \boldsymbol{a} - \int_0^t d\tau\, \mathcal{P}(\boldsymbol{\partial}K_{t-\tau} * \cdot \boldsymbol{u}_\tau \boldsymbol{u}_\tau) \qquad {}_{,(t,\boldsymbol{x})\in(0,\infty)\times\boldsymbol{R}^n}$$

$\varPhi(0) = 0, \varPhi(t) > 0, \partial_t\varPhi(t) = \varphi(t)$ なる関数 $\varPhi = \varPhi(t)$ を採り、一般に $f^\varPhi(t, \boldsymbol{x}) = f(\varPhi(t), \boldsymbol{x})$ とすれば、原解 $\boldsymbol{u}$ に対して時間変換解 $\boldsymbol{u}^\varPhi$ を定めることができる。このとき原方程式は時間変換解 $\boldsymbol{u}^\varPhi$ に対する次の時間変換方程式と同値となる。

$$(1.4) \quad \boldsymbol{u}_t^\varPhi = K_t^\varPhi * \boldsymbol{a} - \int_0^t d\tau\, \mathcal{P}(\boldsymbol{\partial}K_{t-\tau}^\varPhi * \varphi_\tau \cdot \boldsymbol{u}_\tau^\varPhi \boldsymbol{u}_\tau^\varPhi) \qquad {}_{,(t,\boldsymbol{x})\in(0,\infty)\times\boldsymbol{R}^n}$$

定義７ (解の線形項と非線形項)

ＮＳＩＶＰ (1.2) の解 $\boldsymbol{u}$ が積分方程式 (1.3) あるいは時間変換積分方程式 (1.4) を満たすとき、解

はその方程式に基き右辺の第１項と第２項の和に分解される。これらを各々、解の線形項 $\boldsymbol{u}^{(L)}$ および非線形項 $\boldsymbol{u}^{(NL)}$ とする。

$$\boldsymbol{u}_t^{(L)} = K_t * \boldsymbol{a} \quad , \ \boldsymbol{u}_t^{(NL)} = -\int_0^t d\tau\, \mathcal{P}(\boldsymbol{\partial} K_{t-\tau} * \cdot \boldsymbol{u}_\tau \boldsymbol{u}_\tau)$$

$$\boldsymbol{u}_t^{\Phi(L)} = K_t^{\Phi} * \boldsymbol{a} \ , \ \boldsymbol{u}_t^{\Phi(NL)} = -\int_0^t d\tau\, \mathcal{P}(\boldsymbol{\partial} K_{t-\tau}^{\Phi} * \varphi_\tau \cdot \boldsymbol{u}_\tau^{\Phi} \boldsymbol{u}_\tau^{\Phi}) \qquad []$$

２. 時間局所可解性解析

本項ではＮＳＩＶＰの時間局所可解性を示す。これは、先ず積分方程式の時間局所可解性を示し、次いでその解の正則性を示すことにより、証明される。積分方程式の時間局所可解性は、厳縮小型写像の不動点定理を用いて行われる。

命題１ (積分方程式の時間局所可解性)

正変数 ξ に対する減少関数 $TM = TM(\xi)$ が存在し、初期値 $\boldsymbol{a}_{\in \mathcal{P}\boldsymbol{L}^q,\, q\in(n,\infty]}$ に対して、積分方程式 (1.3) は時間区間 $[0,T_M]_{,T_M = TM(\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^q})}$ における解 $\boldsymbol{u}_{\in \boldsymbol{L}^q_{[0,T_M]}}$ を持つ。[]

証明

先ず、以下の写像 Ψ , 集合 S_λ を導入する。但し $t \in [0,T]_{\,,T\in(0,\infty]}, \lambda \in (0,\infty)$ とする。

$$\Psi \boldsymbol{f}_t = K_t * \boldsymbol{a} - \int_0^t d\tau\, \mathcal{P}(\boldsymbol{\partial} K_{t-\tau} * \cdot \boldsymbol{f}_\tau \boldsymbol{f}_\tau)$$

$$S_\lambda = \left\{ \boldsymbol{f}_{\in \boldsymbol{L}^q_{[0,T]}} \,\middle|\, \|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{L}^q_{[0,T]}} \le \lambda \right\}$$

このとき $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \in S_\lambda$ に対して以下の評価式を得る。但し $\chi(t) = \nu^{-1}(\nu t)^{\beta}{}_{,\beta = \frac{1}{2}(1-\frac{n}{q})}$ とする。

$$\|\Psi \boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{L}^q_t} \le C_1 \|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^q} + C_2 \chi(t) \|\boldsymbol{f}\|^2_{\boldsymbol{L}^q_{[0,T]}}$$

$$\|\Psi \boldsymbol{f} - \Psi \boldsymbol{g}\|_{\boldsymbol{L}^q_t} \le C_2 \chi(t) (\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{L}^q_{[0,T]}} + \|\boldsymbol{g}\|_{\boldsymbol{L}^q_{[0,T]}}) \|\boldsymbol{f} - \boldsymbol{g}\|_{\boldsymbol{L}^q_{[0,T]}}$$

ここで、定数 $\Theta_{\in(0,1)}$ を採り、$TM(\xi), T_M; \lambda$ を以下により導入する。

$$TM(\xi) = \Theta \frac{1}{\nu} \Big(\frac{\nu}{4C_1C_2\xi} \Big)^{\frac{1}{\beta}} , \qquad T_M = TM(\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^q})$$

$$\lambda = \frac{1}{2C_2\chi(T_M)} \big(1 - \sqrt{1 - 4C_1C_2\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^q}\chi(T_M)}\, \big)$$

このとき、以下が成立つ。

$$\chi(T_M) = \Theta^{\beta} (4C_1C_2\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^q})^{-1}$$

$$\lambda \le 2C_1 \|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^q}$$

また、定数 $C_{\,\in(0,1)}$ が存在して、各時刻 $t_{\,\in[0,T_M]}$ に対して次式が成立する。

$$C_1\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^q} + C_2\chi(t)\lambda^2 < \lambda$$

$$2C_2\chi(t)\lambda \le C$$

従って、上記評価式より $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}_{\,\in S_\lambda}$ に対して以下が成立つ。

$$\Psi \boldsymbol{f} \in S_\lambda$$

$$\|\Psi \boldsymbol{f} - \Psi \boldsymbol{g}\|_{\boldsymbol{L}^q_{[0,T_M]}} \le C \|\boldsymbol{f} - \boldsymbol{g}\|_{\boldsymbol{L}^q_{[0,T_M]}}$$

即ち、写像 Ψ は集合 S_λ 上の厳縮小写像を与える。

従って、不動点定理に依り、写像 Ψ は集合 S_λ 内に不動点 $\boldsymbol{u}$ を持つ。

このとき $\Psi \boldsymbol{u}_t = \boldsymbol{u}_{t\ ,t\in[0,T_M]}$ が成立するので、$\boldsymbol{u}$ は時間区間 $[0,T_M]$ における積分方程式 (1.3) の解となる。

そして、以上の議論より以下の関係式が得られ、$\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}^q_{[0,T_M]}$ となる。

$$\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^q_{[0,T_M]}} \le 2C_1\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^q}$$
$$\|\boldsymbol{u}^{(NL)}\|_{\boldsymbol{L}^q_{[0,T_M]}} \le C_1\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^q} \qquad []$$

註 (非線形項の上限評価)

上記の議論における $\|\mathcal{P}(\boldsymbol{\partial} K_{t-\tau} * \cdot \boldsymbol{f}_\tau \boldsymbol{f}_\tau)\|_{\boldsymbol{L}^q\ ,q\in(n,\infty]}$ の上限評価は、以下の関係に依る。

$$\|\mathcal{P}_{ij}\partial_k K_{t-\tau} * f_{k\,\tau} f_{j\,\tau}\|_{L^q} \le \|\mathcal{P}_{ij}\partial_k K_{t-\tau}\|_{L^Q}\|f_{k\,\tau}\|_{L^q}\|f_{j\,\tau}\|_{L^q}$$
$$\|\mathcal{P}_{ij}\partial_k K\|_{L^Q} \le c_Q\left\|\left(1-\frac{\xi_i\xi_j}{\boldsymbol{\xi}^2}\right)\xi_k\hat{K}\right\|_{L^q}$$
$$\le 2c_Q\|\xi_k\hat{K}\|_{L^q} = C(\nu t)^{-\frac{n}{2}\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}\ _{;\,1=\frac{1}{q}+\frac{1}{Q}\ ,\,Q\in[1,2]}$$

但し、$\mathcal{P}_{ij}$ を $\mathcal{P}$ の空間座標成分表示、ξ_k は n 次元フーリエ変換変数の成分、$\hat{K}$ は K のフーリエ変換とし、前者ではヤングの不等式、後者ではハウスドルフ-ヤングの不等式を用いている。[]

命題 2 (積分方程式の時間局所解の正則性)

初期値 $\boldsymbol{a}_{\,\in\mathcal{P}\boldsymbol{L}^{[2,q]},q\in(n,\infty]}$ に対して**命題 1** に基く積分方程式 (1.3) の時間局所解 $\boldsymbol{u}_{\in\mathcal{P}\boldsymbol{L}^{[2,q]}_{[0,T_M]}}$ は以下の特性 (2.1-4) を有し、正則である。但し、$|\alpha|\ge 1$ とし、(2.2)(2.4) では $q<\infty$ とする。

(2.1) $\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{L}^r_{[0,T_M],r\in[2,q]}$

(2.2) $\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{L}^r_{(0,T_M],r\in(q,\infty]}$; $\displaystyle\sup_{t\in(0,T_M]} t^{\frac{n}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})}\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^r_t}<\infty$

(2.3) $\partial^\alpha\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{L}^r_{(0,T_M],r\in[2,q]}$; $\displaystyle\sup_{t\in(0,T_M]} t^{\frac{|\alpha|}{2}}\|\partial^\alpha\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^r_t}<\infty$

(2.4) $\partial^\alpha\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{L}^r_{(0,T_M],r\in(q,\infty]}$; $\displaystyle\sup_{t\in(0,T_M]} t^{\frac{n}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})+\frac{|\alpha|}{2}}\|\partial^\alpha\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^r_t}<\infty$

また、初期値 $\boldsymbol{a}_{\,\in\mathcal{P}\boldsymbol{L}^{[2,q]},q\in(n,\infty]},\partial^\alpha\boldsymbol{a}_{\,\in\mathcal{P}\boldsymbol{L}^{[2,q]},q\in(n,\infty],|\alpha|\le m}$ に対して**命題 1** に基く積分方程式 (1.3) の時間局所解 $\boldsymbol{u}_{\in\mathcal{P}\boldsymbol{L}^q_{[0,T_M]}}$ は上記特性 (2.1-4) に加えて次の特性 (2.5) を有する。

(2.5) $\partial^\alpha\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{L}^r_{[0,T_M],r\in[2,q],|\alpha|\le m}$ []

証明

(1) 先ず、特性 (2.1) を示す。

$r\in[2,q]$ とするとき、各時刻 $t_{\in[0,T_M]}$ において次式が成立する。

$$\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^r_t} \le C_1\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^r} + C_2\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^q_{[0,T_M]}}\int_0^t d\tau\,(\nu(t-\tau))^{-\frac{n}{2}\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^r_\tau}$$

ここで、A,X および作用素 $\mathcal{K}$ を以下に依り導入する。但し $t\in(0,T_M]$ とする。

$$A = C_1\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^r}$$
$$X_t = \|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^r_t}$$
$$\mathcal{K}f_t = C_2\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^q_{[0,T_M]}}\int_0^t d\tau\,(\nu(t-\tau))^{-\frac{n}{2}\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}f_\tau$$

このとき、上記の積分関係式は次の関係式で表される。

$$X\le A+\mathcal{K}X$$

この関係式の反復的代入に依り、$k_{\in\boldsymbol{N}}$ に対して次式を得る。

$$X\le\sum_{j=0}^{k}\mathcal{K}^jA+\mathcal{K}^{k+1}X$$

このとき、$j_{\,\in\boldsymbol{N}}$ に対して各時刻 $t_{\in[0,T_M]}$ において以下が成立する。但し、$B(x,y)$ をベータ関数、$\Gamma(x)$ をガンマ関数とし、$\beta=\dfrac{1}{2}\Big(1-\dfrac{n}{q}\Big)$ とする。

$$\mathcal{K}^j A \le A\big(c_2\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^q_{[0,T_M]}}\nu^{-1}(\nu t)^\beta\big)^j\prod_{k=0}^{j-1}B(\beta,1+k\beta)$$
$$\le A\frac{1}{\Gamma(1+j\beta)}\big(C_2\Gamma(\beta)\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^q}\nu^{-1}(\nu t)^\beta\big)^j$$
$$\mathcal{K}^j X \le \|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^q_{[0,T_M]}}\frac{1}{\Gamma(1+j\beta)}\big(C_2\Gamma(\beta)\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^q}\nu^{-1}(\nu t)^\beta\big)^j$$
ここで $k\to\infty$ に対して $\mathcal{K}^kX\to 0$ となることから、各時刻 $t_{\in[0,T_M]}$ において次式が成立する。
$$X \le U^{(r)}(\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^r},t)<\infty$$
$$U^{(r)}(\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^r},t)=C_1\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^r}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(1+j\beta)}\big(C_2\Gamma(\beta)\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^q}\nu^{-1}(\nu t)^\beta\big)^j$$
これは次を与える。
$$\sup_{t\in[0,T_M]}\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^r_t}<\infty$$
以上より、所期の結論が得られた。

(２) 次に、特性 (2.2) を示す。

$r\in(q,\infty]$ のとき、$\Phi(t)=t^\varepsilon{}_{,\,\varepsilon\in(0,(\frac{n}{2}(\frac{2}{q}-\frac{1}{r})+\frac{1}{2})^{-1})}$ とすれば、各変換時刻 $\Phi_{t\,\in(0,T_M]}$ において次式が成立する。
$$\|\boldsymbol{u}^\Phi\|_{\boldsymbol{L}^r_t}\le C_1(\nu\Phi_t)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})}\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^q}+c_2\|\boldsymbol{u}\|^2_{\boldsymbol{L}^q_{[0,T_M]}}\int_0^t d\tau\,(\nu\Phi_{t-\tau})^{-\frac{n}{2}(\frac{2}{q}-\frac{1}{r})-\frac{1}{2}}\varphi_\tau$$
$$\le C_1(\nu\Phi_t)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})}\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^q}+C_2\nu^{-1}(\nu\Phi_t)^{\frac{1}{2}-\frac{n}{2}(\frac{2}{q}-\frac{1}{r})}\|\boldsymbol{a}\|^2_{\boldsymbol{L}^q}$$
従って、以下が得られる。
$$\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^r_t}\le C_1(\nu t)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})}\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^q}+C_2\nu^{-1}(\nu t)^{\frac{1}{2}-\frac{n}{2}(\frac{2}{q}-\frac{1}{r})}\|\boldsymbol{a}\|^2_{\boldsymbol{L}^q}$$
$$(\nu t)^{\frac{n}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})}\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^r_t}\le C_1\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^q}+C_2\nu^{-1}(\nu t)^{\frac{1}{2}(1-\frac{n}{q})}\|\boldsymbol{a}\|^2_{\boldsymbol{L}^q}$$
$$(\nu t)^{\frac{n}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})}\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^r_t}\le U^{(q)}(\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^q})$$
以上に依り所期の結論が得られた。

(３) 次に、特性 (2.3) を示す。

$r\in[2,q]$ の場合、$Q=\min\{q,2r\},\Phi(t)=t^\varepsilon{}_{,\,\varepsilon\in(0,(\frac{n}{2}(\frac{2}{Q}-\frac{1}{r})+\frac{1}{2}+\frac{|\alpha|}{2})^{-1})}$ とすれば、各変換時刻 $\Phi_{t\,\in(0,T_M]}$ において、以下が成立する。
$$\|\partial^\alpha\boldsymbol{u}^\Phi\|_{\boldsymbol{L}^r_t}\le C_1(\nu\Phi_t)^{-\frac{|\alpha|}{2}}\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^r}+C_2\|\boldsymbol{u}\|^2_{\boldsymbol{L}^Q_{[0,T_M]}}\int_0^t d\tau\,(\nu\Phi_{t-\tau})^{-\frac{n}{2}(\frac{2}{Q}-\frac{1}{r})-\frac{1}{2}-\frac{|\alpha|}{2}}\varphi_\tau$$
$$=C_1(\nu\Phi_t)^{-\frac{|\alpha|}{2}}\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^r}+C_2\nu^{-1}(\nu\Phi_t)^{\frac{1}{2}-\frac{n}{2}(\frac{2}{Q}-\frac{1}{r})-\frac{|\alpha|}{2}}b_\varepsilon\|\boldsymbol{u}\|^2_{\boldsymbol{L}^Q_{[0,T_M]}}$$
$$b_\varepsilon=\varepsilon B\Big(1-\varepsilon\Big(\frac{n}{2}\Big(\frac{2}{Q}-\frac{1}{r}\Big)+\frac{1}{2}+\frac{|\alpha|}{2}\Big),\varepsilon\Big)$$
$$\|\partial^\alpha\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^r_t}\le C_1(\nu t)^{-\frac{|\alpha|}{2}}\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^r}+C_2\nu^{-1}(\nu t)^{\frac{1}{2}-\frac{n}{2}(\frac{2}{Q}-\frac{1}{r})-\frac{|\alpha|}{2}}b_\varepsilon\|\boldsymbol{u}\|^2_{\boldsymbol{L}^Q_{[0,T_M]}}$$
$$(\nu t)^{\frac{|\alpha|}{2}}\|\partial^\alpha\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^r_t}\le U^{(r,\alpha)}(\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^r})$$
以上より、所期の結論が得られた。

(４) 次に、特性 (2.4) を示す。

$r\in(q,\infty]$ の場合、$\Phi(t)=t^\varepsilon{}_{,\,\varepsilon\in(0,(\frac{n}{2}(\frac{2}{q}-\frac{1}{r})+\frac{1}{2}+\frac{|\alpha|}{2})^{-1})}$ とすれば、各変換時刻 $\Phi_{t\,\in(0,T_M]}$ において、以下が成立する。

$$\|\partial^\alpha \boldsymbol{u}^\Phi\|_{\boldsymbol{L}^r_t} \le C_1(\nu\Phi_t)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})-\frac{|\alpha|}{2}}\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^q}+c_2\|\boldsymbol{u}\|^2_{\boldsymbol{L}^q_{[0,T_M]}}\int_0^t d\tau\,(\nu\Phi_{t-\tau})^{-\frac{n}{2}(\frac{2}{q}-\frac{1}{r})-\frac{1}{2}-\frac{|\alpha|}{2}}\varphi_\tau$$
$$\le C_1(\nu\Phi_t)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})-\frac{|\alpha|}{2}}\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^q}+C_2\nu^{-1}(\nu\Phi_t)^{\frac{1}{2}-\frac{n}{2}(\frac{2}{q}-\frac{1}{r})-\frac{|\alpha|}{2}}b_\varepsilon\|\boldsymbol{a}\|^2_{\boldsymbol{L}^q}$$
$$b_\varepsilon = \varepsilon B\Big(1-\varepsilon\Big(\frac{n}{2}(\frac{2}{q}-\frac{1}{r})+\frac{1}{2}+\frac{|\alpha|}{2}\Big),\varepsilon\Big)$$
$$\|\partial^\alpha \boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^r_t} \le C_1(\nu t)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})-\frac{|\alpha|}{2}}\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^q}+C_2\nu^{-1}(\nu t)^{\frac{1}{2}-\frac{n}{2}(\frac{2}{q}-\frac{1}{r})-\frac{|\alpha|}{2}}b_\varepsilon\|\boldsymbol{a}\|^2_{\boldsymbol{L}^q}$$
$$(\nu t)^{\frac{n}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})+\frac{|\alpha|}{2}}\|\partial^\alpha \boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^r_t} \le U^{(q,\alpha)}(\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^q})$$

以上より、所期の結論が得られた。

(5) 最後に、特性 (2.5) を示す。

本項では $k=1,\ldots,m$ に対する $(2.5)_{|\alpha|\le k}$ を帰納的に証明する。$k=1$ の場合、$|\alpha|=1$ なる α に対して次式が成立する。

$$\|\partial^\alpha \boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^r_t} \le C_1\|\partial^\alpha \boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^r}+C_2\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^q_{[0,T_M]}}\int_0^t d\tau\,(\nu(t-\tau))^{-\frac{n}{2}\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}\|\partial^\alpha \boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^r_\tau}$$

ここで、A, X および作用素 $\mathcal{K}$ を各時刻 $t_{\in(0,T_M]}$ に対して以下に依り導入する。

$$A = C_1\|\partial^\alpha \boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^r}$$
$$X_t = \|\partial^\alpha \boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^r_t}$$
$$\mathcal{K}f_t = C_2\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^q_{[0,T_M]}}\int_0^t d\tau\,(\nu(t-\tau))^{-\frac{n}{2}\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}f_\tau$$

このとき、(1) と同様の議論に依り、$|\alpha|=1$ なる α に対する次の結果が得られる。

$$\sup_{t\in[0,T_M]}\|\partial^\alpha \boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^r_t} < \infty$$

従って $(2.5)_{|\alpha|=1}$ が成立する。

次に $(2.5)_{|\alpha|\le k\le m-1}$ が成立しているとき、$|\alpha|=k+1$ なる α に対して、次式が成立する。但し、式中の β,γ に関する和は $\beta+\gamma=\alpha$; $|\beta|,|\gamma|\le k$ なる範囲に亙るものとする。

$$\|\partial^\alpha \boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^r_t} \le C_1\|\partial^\alpha \boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^r}+C_2\sum_{\beta,\gamma}c_{\beta,\gamma}\|\partial^\beta \boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^q_{[0,T_M]}}\int_0^t d\tau\,(\nu(t-\tau))^{-\frac{n}{2}\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}\|\partial^\gamma \boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^r_\tau}$$
$$+C_2\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^q_{[0,T_M]}}\int_0^t d\tau\,(\nu(t-\tau))^{-\frac{n}{2}\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}\|\partial^\alpha \boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^r_\tau}$$

ここで、A, X および作用素 $\mathcal{K}$ を各時刻 $t_{\in(0,T_M]}$ に対して以下に依り導入する。

$$A = C_1\|\partial^\alpha \boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^r}+C_2\sum_{\beta,\gamma}c_{\beta,\gamma}\|\partial^\beta \boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^q_{[0,T_M]}}\int_0^t d\tau\,(\nu(t-\tau))^{-\frac{n}{2}\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}\|\partial^\gamma \boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^r_\tau}$$
$$X_t = \|\partial^\alpha \boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^r_t}$$
$$\mathcal{K}f_t = C_2\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^q_{[0,T_M]}}\int_0^t d\tau\,(\nu(t-\tau))^{-\frac{n}{2}\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}f_\tau$$

このとき、(1) と同様の議論に依り、$|\alpha|=k+1$ なる α に対する次の結果が得られる。

$$\sup_{t\in[0,T_M]}\|\partial^\alpha \boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^r_t} < \infty$$

従って $(2.5)_{|\alpha|=k+1}$ が成立する。

以上に依り所期の結論が得られた。 $\square$

定理 1 (ＮＳＩＶＰの時間局所可解性)

ＮＳＩＶＰ (1.2) は時間局所解をもつ。 $\square$

証明

命題１, 命題２より、積分方程式 (1.3) は任意階偏微分可能な時間局所解をもつ。このとき、積分方程式 (1.3) は次の積分方程式と同値となる。

$$\boldsymbol{u}_t = K_t{*}\boldsymbol{a} - \int_0^t d\tau\, K_{t-\tau}{*}\mathcal{P}((\boldsymbol{u}_\tau\cdot\boldsymbol{\partial})\boldsymbol{u}_\tau)$$

従って、この積分方程式は任意階偏微分可能な時間局所解をもつ。このとき、この積分方程式は、ＮＳＩＶＰ (1.2) と同値となる。従って、ＮＳＩＶＰ (1.2) は時間局所解をもつ。 []

３. 先験的評価

本項ではＮＳＩＶＰに対する先験的評価を与える。これは、エネルギー非増加性に対応する。

命題３ (エネルギー非増加性)

初期値 (1.1) に対応するＮＳＩＶＰ (1.2) の時間局所解 $\boldsymbol{u}_{\,\in\mathcal{P}\boldsymbol{L}^{[2,q]}_{[0,T_M]}}$ に対して次の先験的評価が成立する。

(3.1) $\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^2_{[0,T_M]}} \le \|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^2}$ []

証明

ＮＳＩＶＰの初期値 $\boldsymbol{a}$ に対応する解 $\boldsymbol{u}$ は以下の関係式を満たす。但し $t\in[0,T_M]$ とする。

$$(\partial_t - \nu\triangle)\boldsymbol{u}^2 = -2\nu\boldsymbol{\partial u\partial u} - \boldsymbol{\partial}\Big(\cdot\boldsymbol{u}\Big(\boldsymbol{u}^2 + \frac{2}{\rho}p\Big)\Big)\ \ ,\ \boldsymbol{\partial u\partial u} = \sum_{i,j}\partial_i u_j\partial_i u_j$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_t^2 &= K_t{*}\boldsymbol{a}^2 - 2\int_0^t d\tau\, K_{t-\tau}{*}\nu\boldsymbol{\partial u_\tau\partial u_\tau} - \int_0^t d\tau\, \boldsymbol{\partial}\Big(K_{t-\tau}{*}\cdot\,\boldsymbol{u}_\tau\Big(\boldsymbol{u}_\tau^2 + \frac{2}{\rho}p_\tau\Big)\Big)\\ &\le K_t{*}\boldsymbol{a}^2 - \int_0^t d\tau\,\boldsymbol{\partial}\Big(K_{t-\tau}*\cdot\,\boldsymbol{u}_\tau\Big(\boldsymbol{u}_\tau^2 + \frac{2}{\rho}p_\tau\Big)\Big)\end{aligned}$$

これより $k_{\in\{0\}\cup\boldsymbol{N}}$ および $B_r = \{\,\boldsymbol{x}_{\,\in\boldsymbol{R}^n}\,|\,x\le r\,\}$ に対して次を得る。

$$\int_k^{k+1}dr\int_{B_r}dV\,\boldsymbol{u}_t^2 \le \int_k^{k+1}dr\int_{B_r}dV\,K_t{*}\boldsymbol{a}^2 - \int_0^t d\tau\int_k^{k+1}dr\int_{B_r}dV\,\boldsymbol{\partial}\Big(K_{t-\tau}*\cdot\,\boldsymbol{u}_\tau\Big(\boldsymbol{u}_\tau^2 + \frac{2}{\rho}p_\tau\Big)\Big)$$

このとき、平均値の定理により、各 $k_{\in\{0\}\cup\boldsymbol{N}}$ に対して $r_{k\,\in(k,k+1)}$ が存在して、次が成立つ。

$$\lim_{k\to\infty}\int_k^{k+1}dr\int_{B_r}dV\,\boldsymbol{u}_t^2 = \lim_{k\to\infty}\int_{B_{r_k}}dV\,\boldsymbol{u}_t^2 = \|\boldsymbol{u}_t\|_2^2$$

同様に、次が成立つ。

$$\lim_{k\to\infty}\int_k^{k+1}dr\int_{B_r}dV\,K_t{*}\boldsymbol{a}^2 = \|K_t{*}\boldsymbol{a}^2\|_1 \le \|\boldsymbol{a}\|_2^2$$

他方、以下を得る。但し、$\partial B_r = \{\,\boldsymbol{x}_{\,\in\boldsymbol{R}^n}\,|\,x=r\,\}, \Delta B_k = \{\,\boldsymbol{x}_{\,\in\boldsymbol{R}^n}\,|\,k\le x\le k+1\,\}$ とする。

$$\begin{aligned}\Big|\int_k^{k+1}dr\int_{B_r}dV\,\boldsymbol{\partial}\Big(K_{t-\tau}*\cdot\,\boldsymbol{u}_\tau\Big(\boldsymbol{u}_\tau^2+\frac{2}{\rho}p_\tau\Big)\Big)\Big| &= \Big|\int_k^{k+1}dr\int_{\partial B_r}d\boldsymbol{S}\,K_{t-\tau}*\cdot\,\boldsymbol{u}_\tau\Big(\boldsymbol{u}_\tau^2+\frac{2}{\rho}p_\tau\Big)\Big|\\ \le \int_k^{k+1}dr\int_{\partial B_r}dS\,K_{t-\tau}*u_\tau\Big(u_\tau^2+\frac{2}{\rho}p_\tau\Big) &= \int_{\Delta B_k}dV\,K_{t-\tau}*u_\tau\Big(u_\tau^2+\frac{2}{\rho}p_\tau\Big)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\int_{\Delta B_k}dV\,K_{t-\tau}*u_\tau\Big(u_\tau^2+\frac{2}{\rho}p_\tau\Big) &= \int_{\boldsymbol{R}^n}dV\,K_{t-\tau}*u_\tau\Big(u_\tau^2+\frac{2}{\rho}p_\tau\Big)\\ &= \Big\|K_{t-\tau}*u_\tau\Big(u_\tau^2+\frac{2}{\rho}p_\tau\Big)\Big\|_1 \le \Big\|u_\tau\Big(u_\tau^2+\frac{2}{\rho}p_\tau\Big)\Big\|_1 \le C\|\,u_\tau\|_3^3 < \infty\end{aligned}$$

但し、次の結果を用いた。

$$\|\,up\,\|_1 \le \|\,u\,\|_3\|\,p\,\|_{\frac{3}{2}} = \|\,u\,\|_3\|\,\rho\triangle^{-1}\boldsymbol{\partial\partial}(\boldsymbol{uu})\|_{\frac{3}{2}} \le C\|\,u\,\|_3^3$$

以上より、以下を得る。

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\Delta B_k} dV\, K_{t-\tau} * u_\tau\Big(u_\tau^2+\frac{1}{\rho}p_\tau\Big)=0$$
$$\lim_{k\to\infty}\int_k^{k+1} dr\int_{B_r} dV\,\boldsymbol{\partial}\Big(K_{t-\tau} *\cdot\, \boldsymbol{u}_\tau\Big(\boldsymbol{u}_\tau^2+\frac{1}{\rho}p_\tau\Big)\Big)=0$$
従って、次を得る。
$$\|\boldsymbol{u}_t\|_2^2 \le \|\boldsymbol{a}\|_2^2$$
即ち所与の結果を得る。[]

命題４ (解の上限評価)

初期値 $\boldsymbol{a}_{\in\mathcal{P}\boldsymbol{L}^{[2,q]},q\in(n,\infty]}$ に対応するＮＳＩＶＰ (1.2) の時間局所解 $\boldsymbol{u}_{\in\mathcal{P}\boldsymbol{L}^{[2,q]}_{[0,T_M]}}$ の $\boldsymbol{L}^r_{t\,,\,r\in[2,\infty]}$ ノルムに対し、以下の先験的評価が成立する。

$$(3.2)\quad \|\boldsymbol{u}^{(L)}\|_{\boldsymbol{L}^r_t} \le C_1^{(r)}(\nu t)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})}\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^2}$$
$$\|\boldsymbol{u}^{(NL)}\|_{\boldsymbol{L}^r_t} \le C_2^{(r)}\nu^{-1}(\nu t)^{-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{r})+\frac{1}{2}}\|\boldsymbol{a}\|^2_{\boldsymbol{L}^2}$$
$$(3.3)\quad \|\partial^\alpha\boldsymbol{u}^{(L)}\|_{\boldsymbol{L}^r_t} \le C_1^{(\alpha,r)}(\nu t)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})-\frac{|\alpha|}{2}}\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^2}$$
$$\|\partial^\alpha\boldsymbol{u}^{(NL)}\|_{\boldsymbol{L}^r_t} \le C_2^{(\alpha,r)}\nu^{-1}(\nu t)^{-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{r})+\frac{1}{2}-\frac{|\alpha|}{2}}\|\boldsymbol{a}\|^2_{\boldsymbol{L}^2}$$

証明

$\Phi_t = t^{\varepsilon}{}_{,\,\varepsilon\in(0,(\frac{n}{2}(1-\frac{1}{r})+\frac{1}{2})^{-1})}$ あるいは $\Phi_t = t^{\varepsilon}{}_{,\,\varepsilon\in(0,(\frac{n}{2}(1-\frac{1}{r})+\frac{1}{2}+\frac{|\alpha|}{2})^{-1})}$ として、時間変換積分方程式 (1.4) および (3.1) に基き以下を得る。

$$\|\boldsymbol{u}_t^{(L)\Phi}\|_{\boldsymbol{L}^r} \le C_1(\nu\Phi_t)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})}\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^2}$$
$$\|\boldsymbol{u}_t^{(NL)\Phi}\|_{\boldsymbol{L}^r} \le c_2\int_0^t d\tau\,(\nu\Phi_{t-\tau})^{-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{r})-\frac{1}{2}}\varphi_\tau\|\boldsymbol{a}\|^2_{\boldsymbol{L}^2} = C_2\nu^{-1}(\nu\Phi_t)^{-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{r})+\frac{1}{2}}\|\boldsymbol{a}\|^2_{\boldsymbol{L}^2}$$
$$\|\partial^\alpha\boldsymbol{u}_t^{(L)\Phi}\|_{\boldsymbol{L}^r} \le C_1(\nu\Phi_t)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})-\frac{|\alpha|}{2}}\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^2}$$
$$\|\partial^\alpha\boldsymbol{u}_t^{(NL)\Phi}\|_{\boldsymbol{L}^r} \le c_2\int_0^t d\tau\,(\nu\Phi_{t-\tau})^{-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{r})-\frac{1}{2}-\frac{|\alpha|}{2}}\varphi_\tau\|\boldsymbol{a}\|^2_{\boldsymbol{L}^2} = C_2\nu^{-1}(\nu\Phi_t)^{-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{r})+\frac{1}{2}-\frac{|\alpha|}{2}}\|\boldsymbol{a}\|^2_{\boldsymbol{L}^2}$$

これより所与の結果を得る。[]

４. 時間大域可解性解析

命題５ (ＮＳＩＶＰの時間大域可解性)

初期値 (1.1) に対応するＮＳＩＶＰ (1.2) について以下が成立つ。

(１) 時間局所解 $\boldsymbol{u}_{\in\mathcal{P}\boldsymbol{L}^{[2,q]}_{[0,T]}}$ に対し、延長時間 $\Delta T = \Delta T(\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^2},T)$ と延長時間局所解 $\boldsymbol{u}_{\in\mathcal{P}\boldsymbol{L}^{[2,q]}_{[0,T+\Delta T]}}$ が存在する。ここで $\Delta T(\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^2},T)$ は T の増加関数となる。

(２) 時間大域解 $\boldsymbol{u}$ を持つ。これは $\boldsymbol{u}\in\mathcal{P}\boldsymbol{L}^{[2,q]}_{[0,\infty)}\cap\mathcal{P}\boldsymbol{L}^{(q,\infty]}_{(0,\infty)},\partial^\alpha\boldsymbol{u}\in\mathcal{P}\boldsymbol{L}^{[2,\infty]}_{(0,\infty)}$ を満たす。[]

証明

(１) は以下に依る。

有限時間区間における解 $\boldsymbol{u}_{t,t\in(0,T]}$ の終点を改めて初期時刻として、終点における解を改めて初期値とし、改めて延長時間領域での可解性解析 (命題１) を行うことに依り、延長解の存在が分る。

延長解の $t=T$ での先験的評価 $\|\boldsymbol{u}_T\|_{\boldsymbol{L}^q} \le U_2^{(q)}(\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^2},T)_{,q\in(n,\infty]}$(命題４) から、延長解の存在時間に対して $\Delta T \ge TM(U_2^{(q)}(\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^2},T))$ が成立する。$U_2^{(q)}(\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^2},t)$ が t の減少関数であり、$TM(\xi)$ が ξ の減少関数であることから、$TM(U_2^{(q)}(\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^2},T))$ は T の増加関数となる。

(２) は以下に依る。

ＮＳＩＶＰが時間局所可解 (命題１) であること、そして、その有限時間区間での解が延長可能であること (上記 (１))、その延長時間が時間区間長に対して増加性であること (上記 (１)) から、解

の延長の反復に依り、任意に長い時間区間に対する解が存在することが分る。従ってＮＳＩＶＰは時間大域可解である。

そして、(命題２) より、$\boldsymbol{u} \in \mathcal{P}\boldsymbol{L}^{[2,q]}_{[0,\infty)} \cap \mathcal{P}\boldsymbol{L}^{(q,\infty]}_{(0,\infty)}, \partial^\alpha \boldsymbol{u} \in \mathcal{P}\boldsymbol{L}^{[2,\infty]}_{(0,\infty)}$ が分る。[]

命題６ (ＮＳＩＶＰの解の漸近減衰性および時間大域的有界性)

初期値 (1.1) に対応するＮＳＩＶＰ (1.2) の時間大域解 $\boldsymbol{u}$ に関して、以下が成立する。

(１) 漸近減衰性

解 $\boldsymbol{u}$ およびその空間変数偏導関数は、以下の $t \to \infty$ に対する漸近減衰性を有する。

$$(4.1)\quad \|\boldsymbol{u}^{(L)}\|_{\boldsymbol{L}^r_t} = O(t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})})$$

$$\|\boldsymbol{u}^{(NL)}\|_{\boldsymbol{L}^r_t} = O(t^{-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{r})+\frac{1}{2}})$$

$$(4.2)\quad \|\partial^\alpha \boldsymbol{u}^{(L)}\|_{\boldsymbol{L}^r_t} = O(t^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})-\frac{|\alpha|}{2}})$$

$$\|\partial^\alpha \boldsymbol{u}^{(NL)}\|_{\boldsymbol{L}^r_t} = O(t^{-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{r})+\frac{1}{2}-\frac{|\alpha|}{2}})$$

(２) 時間大域的有界性

解 $\boldsymbol{u}$ は、次の時間大域的有界性を有する。

$$(4.3)\quad \|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^r_{[0,\infty)}} < \infty \qquad {}_{,r\in[2,q]}$$ []

証明

(１) 漸近減衰性

命題５に加え、(4.1) は (3.2) に、(4.2) は (3.3) に依る。

(２) 時間大域的有界性

命題１の証明より $\|\boldsymbol{u}^{(NL)}\|_{\boldsymbol{L}^q} \le C\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^q,t\in[0,T_M]}$、また命題３より $\|\boldsymbol{u}^{(NL)}\|_{\boldsymbol{L}^2} = \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^{(L)}\|_{\boldsymbol{L}^2}$ $\le \|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{L}^2} + \|\boldsymbol{u}^{(L)}\|_{\boldsymbol{L}^2} \le 2\|\boldsymbol{a}\|_{\boldsymbol{L}^2,t\in[0,T_M]}$ となり、これらの補間により次を得る。

$$\|\boldsymbol{u}^{(NL)}\|_{\boldsymbol{L}^r} \le C_1^{(r)} \|\boldsymbol{a}\|^{\theta_q}_{\boldsymbol{L}^q} \|\boldsymbol{a}\|^{\theta_2}_{\boldsymbol{L}^2}{}_{,\theta_q=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{r}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}},\theta_2=\frac{\frac{1}{r}-\frac{1}{q}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}},t\in[0,T_M],r\in[2,q]}$$

他方、命題５と命題４より次を得る。

$$\|\boldsymbol{u}^{(NL)}\|_{\boldsymbol{L}^r} \le c_2^{(r)} \nu^{-1}(\nu t)^{-\gamma} \|\boldsymbol{a}\|^2_{\boldsymbol{L}^2} \le c_2^{(r)} \nu^{-1}(\nu T_M)^{-\gamma} \|\boldsymbol{a}\|^2_{\boldsymbol{L}^2,t\in[T_M,\infty),r\in[2,q]}$$

以上に加え、命題１の $TM(\xi)$ の表式を用いれば、以下を得る。

$$\|\boldsymbol{u}^{(NL)}\|_{\boldsymbol{L}^r} \le \max\{C_1^{(r)} \|\boldsymbol{a}\|^{\theta_q}_{\boldsymbol{L}^q} \|\boldsymbol{a}\|^{\theta_2}_{\boldsymbol{L}^2}, c_2^{(r)} \nu^{-1}(\nu T_M)^{-\gamma} \|\boldsymbol{a}\|^2_{\boldsymbol{L}^2}\}$$

$$\le \max\{C_1^{(r)} \|\boldsymbol{a}\|^{\theta_q}_{\boldsymbol{L}^q} \|\boldsymbol{a}\|^{\theta_2}_{\boldsymbol{L}^2}, C_2^{(r)} \nu^{-1-\gamma_\beta} \|\boldsymbol{a}\|^{\gamma_\beta}_{\boldsymbol{L}^q} \|\boldsymbol{a}\|^2_{\boldsymbol{L}^2}\}_{,\gamma_\beta=\frac{\gamma}{\beta}}$$

これより (4.3) を得る。

命題７ (ＮＳＩＶＰの解の初期値一様連続依存性および一意性)

初期値 (1.1) に対応するＮＳＩＶＰ (1.2) の時間大域解は、初期値に対して一様連続的に依存し、また $\boldsymbol{a}$ に対して一意である。[]

証明

ＮＳＩＶＰの２つの初期値 $\boldsymbol{a}^{(1)}, \boldsymbol{a}^{(2)}{}_{\in\mathcal{P}\boldsymbol{L}^{[2,q]}}$ に対応する解を $\boldsymbol{u}^{(1)}, \boldsymbol{u}^{(2)}$ とする。$r_{\in[2,q]}$ に対し、$t \in [0, T_M]$ において以下が成立する。

$$\boldsymbol{u}^{(1)}_t - \boldsymbol{u}^{(2)}_t = K_t*(\boldsymbol{a}^{(1)} - \boldsymbol{a}^{(2)}) - \int_0^t d\tau\, \mathcal{P}\boldsymbol{\partial} K_{t-\tau}*(\cdot\boldsymbol{u}^{(1)}_\tau \boldsymbol{u}^{(1)}_\tau - \cdot\boldsymbol{u}^{(2)}_\tau \boldsymbol{u}^{(2)}_\tau)$$

$$\|\boldsymbol{u}^{(1)} - \boldsymbol{u}^{(2)}\|_{\boldsymbol{L}^r_t} \le C_1 \|\boldsymbol{a}^{(1)} - \boldsymbol{a}^{(2)}\|_{\boldsymbol{L}^r}$$

$$+C_2(\|\boldsymbol{u}^{(1)}\|_{\boldsymbol{L}^q_{[0,T_M]}} + \|\boldsymbol{u}^{(2)}\|_{\boldsymbol{L}^q_{[0,T_M]}}) \int_0^t d\tau\, (\nu(t-\tau))^{-\frac{n}{2}\frac{1}{q}-\frac{1}{2}} \|\boldsymbol{u}^{(1)} - \boldsymbol{u}^{(2)}\|_{\boldsymbol{L}^r_\tau}$$

これより、命題２（１）と同様の議論から、$t \in [0, T_M]$ において以下が成立する。

$$\|\boldsymbol{u}^{(1)}-\boldsymbol{u}^{(2)}\|_{\boldsymbol{L}^r_t}\le C_1\|\boldsymbol{a}^{(1)}-\boldsymbol{a}^{(2)}\|_{\boldsymbol{L}^r}U^{(r)}(t)$$
$$\sup_{t\in[0,T_M]}\|\boldsymbol{u}^{(1)}-\boldsymbol{u}^{(2)}\|_{\boldsymbol{L}^r_t}\le C_1\|\boldsymbol{a}^{(1)}-\boldsymbol{a}^{(2)}\|_{\boldsymbol{L}^r}U^{(r)}(T_M)$$
$$U^{(r)}(t)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(1+j\beta)}\left(C_2\Gamma(\beta)(\|\boldsymbol{u}^{(1)}\|_{\boldsymbol{L}^q_{[0,T_M]}}+\|\boldsymbol{u}^{(2)}\|_{\boldsymbol{L}^q_{[0,T_M]}})\nu^{-1}(\nu t)^{\beta}\right)^j$$

他方、$r\in[2,q]$ とするとき、命題４と同様の議論に基き、$t>0$ において以下が成立する。

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{u}^{(1)\Phi}_t-\boldsymbol{u}^{(2)\Phi}_t\|_{\boldsymbol{L}^r}&\le C_1(\nu\Phi_t)^{-\frac{n}{2}(\frac12-\frac1r)}\|\boldsymbol{a}^{(1)}-\boldsymbol{a}^{(2)}\|_{\boldsymbol{L}^2}\\&\quad+c_2(\|\boldsymbol{a}^{(1)}\|_{\boldsymbol{L}^2}+\|\boldsymbol{a}^{(2)}\|_{\boldsymbol{L}^2})\int_0^t d\tau\,(\nu\Phi_{t-\tau})^{-\frac{n}{2}(1-\frac1r)-\frac12}\varphi_\tau\|\boldsymbol{a}^{(1)}-\boldsymbol{a}^{(2)}\|_{\boldsymbol{L}^2}\\&\le C_1(\nu\Phi_t)^{-\frac{n}{2}(\frac12-\frac1r)}\|\boldsymbol{a}^{(1)}-\boldsymbol{a}^{(2)}\|_{\boldsymbol{L}^2}\\&\quad+C_2\nu^{-1}(\nu\Phi_t)^{-\frac{n}{2}(1-\frac1r)+\frac12}(\|\boldsymbol{a}^{(1)}\|_{\boldsymbol{L}^2}+\|\boldsymbol{a}^{(2)}\|_{\boldsymbol{L}^2})\|\boldsymbol{a}^{(1)}-\boldsymbol{a}^{(2)}\|_{\boldsymbol{L}^2}\end{aligned}$$
$$\|\boldsymbol{u}^{(1)}-\boldsymbol{u}^{(2)}\|_{\boldsymbol{L}^r_t}\le\|\boldsymbol{a}^{(1)}-\boldsymbol{a}^{(2)}\|_{\boldsymbol{L}^2}U_2^{(r)}(t)$$

これより、$t\in[T_M,\infty)$ において次を得る。

$$\sup_{t\in[T_M,\infty)}\|\boldsymbol{u}^{(1)}-\boldsymbol{u}^{(2)}\|_{\boldsymbol{L}^r_t}\le\|\boldsymbol{a}^{(1)}-\boldsymbol{a}^{(2)}\|_{\boldsymbol{L}^2}U_2^{(r)}(T_M)$$

以上に依り、次を得る。

$$\sup_{t\in[0,\infty)}\|\boldsymbol{u}^{(1)}-\boldsymbol{u}^{(2)}\|_{\boldsymbol{L}^r_t}\le\|\boldsymbol{a}^{(1)}-\boldsymbol{a}^{(2)}\|_{\boldsymbol{L}^r}\max\{U^{(r)}(T_M),U_2^{(r)}(T_M)\}$$

従って、$\|\boldsymbol{a}^{(1)}-\boldsymbol{a}^{(2)}\|_{\boldsymbol{L}^r}\to 0$ に対して $\sup_{t\in[0,\infty)}\|\boldsymbol{u}^{(1)}-\boldsymbol{u}^{(2)}\|_{\boldsymbol{L}^r_t}\to 0$ となる。即ち、解は初期値に一様連続的に依存する。

上記の議論で $\boldsymbol{a}^{(1)}=\boldsymbol{a}^{(2)}$ とすれば $\boldsymbol{u}^{(1)}=\boldsymbol{u}^{(2)}$ が得られる。即ち解は初期値に対して一意となる。[]

５. 無限遠定値問題

前項迄では、次式成立の観点で無限遠で $\mathbf{0}$ となる解 $\boldsymbol{u}$ をもつ問題を扱った。

$$\|\boldsymbol{u}\|^q_{\boldsymbol{L}^q(\boldsymbol{R}^n)}=\sum_{k=0}^{\infty}\int_{|\boldsymbol{x}|\in[k,k+1]}dV(\boldsymbol{x})\,|\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})|^q<\infty\ {}_{,\,q\in[2,\infty),t\in(0,\infty)}$$

これに対して本項では、次式成立の観点で無限遠で定値 $\boldsymbol{c}_{\in\boldsymbol{R}^n}$ となる解 $\boldsymbol{u}^{\#}$ をもつ問題を扱う。

$$\|\boldsymbol{u}^{\#}-\boldsymbol{c}\|^q_{\boldsymbol{L}^q(\boldsymbol{R}^n)}=\sum_{k=0}^{\infty}\int_{|\boldsymbol{x}|\in[k,k+1]}dV(\boldsymbol{x})\,|\boldsymbol{u}^{\#}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{c}|^q<\infty\ {}_{,\,q\in[2,\infty),t\in(0,\infty)}$$

即ち、初期関数 $\boldsymbol{a}^{\#}$ と解 $\boldsymbol{u}^{\#}$ が各々下記の条件 (5.1)(5.2) を満たすとする初期値問題を考える。

(5.1) $\boldsymbol{a}^{\#}\in\boldsymbol{c}+\mathcal{P}\boldsymbol{L}^{[2,q]}$, $\partial^{\alpha}\boldsymbol{a}^{\#}\in\boldsymbol{L}^{[2,q]}{}_{,\,|\alpha|=1,\dots,m}$

(5.2) $\boldsymbol{u}^{\#}\in\boldsymbol{c}+\mathcal{P}\boldsymbol{L}^{[2,q]}_{(0,\infty)}$

$$\partial_t\boldsymbol{u}^{\#}-\nu\triangle\boldsymbol{u}^{\#}+(\boldsymbol{u}^{\#}\cdot\boldsymbol{\partial})\boldsymbol{u}^{\#}+\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\partial}p=\mathbf{0}\qquad {}_{,(t,\boldsymbol{x})\in(0,\infty)\times\boldsymbol{R}^n}$$
$$\boldsymbol{u}^{\#}(0,\boldsymbol{x})=\boldsymbol{a}^{\#}(\boldsymbol{x})\qquad {}_{,\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n}$$

この問題の解の時間大域的存在や特性に関しては、方程式の変換に依り既述問題に準じた議論が可能となる。即ち、$\widetilde{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{u}^{\#}-\boldsymbol{c},\widetilde{\boldsymbol{a}}=\boldsymbol{a}^{\#}-\boldsymbol{c}$ とすれば、初期関数 $\widetilde{\boldsymbol{a}}$ と解 $\widetilde{\boldsymbol{u}}$ が下記の条件 $\widetilde{(5.1)}\widetilde{(5.2)}$ を満たすとする初期値問題となる。

$\widetilde{(5.1)}$ $\widetilde{\boldsymbol{a}}\in\mathcal{P}\boldsymbol{L}^{[2,q]}$, $\partial^{\alpha}\widetilde{\boldsymbol{a}}\in\boldsymbol{L}^{[2,q]}{}_{,\,|\alpha|\le m}$

$\widetilde{(5.2)}$ $\widetilde{\boldsymbol{u}}\in\mathcal{P}\boldsymbol{L}^{[2,q]}_{(0,\infty)}$

$$\partial_t\widetilde{\boldsymbol{u}} - \nu\triangle\widetilde{\boldsymbol{u}} + (\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{\partial})\widetilde{\boldsymbol{u}} + (\widetilde{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{\partial})\widetilde{\boldsymbol{u}} + \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\partial}p = \boldsymbol{0} \qquad {}_{,(t,\boldsymbol{x})\in(0,\infty)\times\boldsymbol{R}^n}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{u}}(0,\boldsymbol{x}) = \widetilde{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) \qquad {}_{,\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n}$$

この方程式は、ＮＳ方程式と比較して線形１階の空間偏微分項が含まれる点で異なる。これに対応して、熱核 $K^{(\nu)}$ の代りに、全空間 $\boldsymbol{R}^n$ での線形方程式 $\partial_t f - \nu\triangle f + (\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{\partial})f = 0$ の初期値問題に対応する次式の核 $\widetilde{K}^{(\nu)}$ を導入する。

$$\widetilde{K}^{(\nu)}(t,\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}^{\,n}}\exp\Big(-\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c}t)^2}{4\nu t}\Big)$$

次の積分方程式 (5.3) は、解の偏導関数が存在する場合、初期値問題 $(5.1)\tilde{}(5.2)\tilde{}$ と同値となる。

$$(5.3)\quad \widetilde{\boldsymbol{u}}_t = \widetilde{K}_t{*}\boldsymbol{a} - \int_0^t d\tau\,\mathcal{P}(\boldsymbol{\partial}\widetilde{K}_{t-\tau}{*}\cdot\widetilde{\boldsymbol{u}}_\tau\widetilde{\boldsymbol{u}}_\tau) \qquad {}_{,(t,\boldsymbol{x})\in(0,\infty)\times\boldsymbol{R}^n}$$

核 $\widetilde{K}$ は熱核 K と同様の特性を有し、特に $\|\widetilde{K}\|_{L^q_t} = \|K\|_{L^q_t}, \|\partial^\alpha\widetilde{K}\|_{L^q_t} = \|\partial^\alpha K\|_{L^q_t}{}_{,q\in[1,\infty]}$ が成立する。これより、概ね本論と同様の議論が可能となり、この問題が次の形の時間大域解をもつことが分る。

$$\boldsymbol{u}^\# = \boldsymbol{c} + \widetilde{\boldsymbol{u}}^{(L)} + \widetilde{\boldsymbol{u}}^{(NL)}$$

他方、既述問題の解 $\boldsymbol{u}$ と本項の解 $\boldsymbol{u}^\#$ に対して、次の関係式が成立する。

$$(5.4)\quad \boldsymbol{u}^\#(t,\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c}t)$$

これは、以下に依り証明される。

$$\begin{aligned}(\partial_t - \nu\triangle)\boldsymbol{u}^\#(t,\boldsymbol{x}) &= (\partial_t - \nu\triangle)\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c}t) - (\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{\partial})\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c}t)\\ &= -((\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c}t)+\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{\partial})\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c}t) - \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\partial}p\\ &= -(\boldsymbol{u}^\#(t,\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{\partial})\boldsymbol{u}^\#(t,\boldsymbol{x}) - \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\partial}p\end{aligned}$$

関係式 (5.4) の利用に依り、既述問題の解の存在から、本項の問題の解の存在が自動的に得られる。

註 (ＣＭＩ問題との関連)

本論とＣＭＩ (クレイ数学研究所) 問題[8] との関連は、以下の通り。

ＣＭＩ問題では、４つの選択肢 (Ａ)(Ｂ)(Ｃ)(Ｄ) が示され、このうちの２者 (Ａ)(Ｃ) が３次元空間の全領域 $\boldsymbol{R}^3$ での初期値問題に対するものとなっている。この２者 (Ａ)(Ｃ) では、初期値に対し、非圧縮性に加え、任意階の空間偏導関数の存在とその空間減衰性が想定されている。

$$|\,\partial^\alpha\boldsymbol{a}\,| \le C_{\alpha,K}(1+x)^{-K} \qquad {}_{,\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^3,\alpha\in(\{0\}\cup\boldsymbol{N})^3,K\ge0}$$

この２者の条件は、本論の初期値に対する条件 $\boldsymbol{a}\in\mathcal{P}\boldsymbol{L}^2\cap\boldsymbol{L}^\infty$ に対する十分条件になっており、従って、本論の結果は、ＣＭＩ問題に対する結論を与えるものになっている。即ち、主張 (Ａ) は肯定され、主張 (Ｃ) は否定される。

本論の結果は、時間大域解の存在のみでなく、一意性や適切性、偏微分可能性、減衰性等の各種の解特性を与えるものとなっている。また、この２者の初期値に対する条件を緩和し、広範な初期値に対して同様の結果が得られることを示すものとなっている。

また、これ以外の２者 (Ｂ)(Ｄ) に対する結論は、別論文[9] において示される。この２者 (Ｂ)(Ｄ) の結論は本論と類似する。

文献

[1] C.L.M.H.Navier, Memoiré sur les lois du mouvement des fluides, *Mémoires Acad. Roy. Sci. Inst. France* **6**(1823), 389-440

[2] G.G.Stokes, On the Theories of the Internal Friction of Fluids in Motion, and of the Equilibrium and Motion of Elastic Solids, *Trans. Camb. Phil. Soc.,* **8**(1845), 287-319

[3] J. Leray, Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace, *Acta Mathematica.***63**(1934), 193-248

[4] E. Hopf, Über die Anfangswertaufgabe für die hydrodyanamischen Grundgleichungen, *Math. Nachr* **4** (1950), 213-231

[5] A. A. Kiselev and O.A. Ladyzenskaya, On the existence and uniqueness of the solution of the nonstationary problem for a viscous incompressible fluid, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.,* **21**(1957), 655-680

[6] S. Ito, The existence and the uniqueness of regular solution of non-stationary Navier-Stokes equation, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I* **9** (1961), 103-140

[7] T. Kato and H. Fujita, On the nonstationary Navier-Stokes system *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* **9** (1962), 243-260

[8] T. Kato, Strong L^p-solution of the Navier-Stokes equation in Rm, with applications to weak solutions in $\boldsymbol{R}^m$, with applications to weak solutions, *Math. Z.* **187** (1984), 471-480

[9] Y. Giga and T. Miyakawa, Solution in L_r of the Navier-Stokes initial value problem, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **89** (1985), 267-281

[10] C. Fefferman, Existence & Smoothness of the Navier-Stokes Equations, Millennium Prize Problems, Clay Mathematical Institute, 2000,

http://www.claymath.org/prizeproblems/navierstokes.htm.

[11] N.Isobe, Global in Time Solvability of Incompressive NSIVP in the Whole Space,-