On the choice of the energy-momentum tensor in electrodynamics and force Abraham

Spirichev Yurii Alexseevich

Abstract

The article deals with the choice of the energy-momentum tensor in electrodynamics. Considered the electromagnetic force in a continuous medium of the following Minkowski and Abraham tensors. From Minkowski tensor the equations of conservation of energy-momentum density, density of electromagnetic force balance in a continuous medium and the equation for the Abraham force. It is shown that it is equal to zero when choosing a canonical material equations. It is shown that the equivalence of the Minkowski momentum density and Abraham. Arguments in favor of a unique choice of the tensor of the Minkowski and Abraham tensor incomplete.

Keywords: the electromagnetic force, the energy-momentum tensor, tensor of the Minkowski, tensor Abraham, Abraham force, to save the equation.

О выборе тензора энергии-импульса в электродинамике и силе Абрагама

Спиричев Юрий Алексеевич

Аннотация.

Статья посвящена проблеме выбора тензора энергии-импульса в электродинамике. Рассмотрен электромагнитные силы в сплошной среде следующие из тензоров Минковского и Абрагама. Из тензора Минковского получены уравнения сохранения плотности энергии-импульса, баланса плотности электромагнитных сил в сплошной среде и уравнение для силы Абрагама. Показано что она равна нулю при выборе канонических материальных уравнений. Показана равноценность форм плотности импульса Минковского и Абрагама. Приведены аргументы, в пользу однозначного выбора тензора Минковского и неполноты тензора Абрагама.

Ключевые слова: электромагнитные силы, тензор энергии-импульса, тензор Минковского, тензор Абрагама, сила Абрагама, уравнения сохранения.

Оглавление

1 Введение

Проблема взаимодействия электромагнитного поля (ЭМП) с веществом, обсуждается уже много лет, однако до настоящего времени ее однозначного решения не найдено. В последние годы ведутся работы по созданию метаматериалов с уникальными электромагнитными свойствами, поэтому вопросы взаимодействия ЭМП с веществом приобрели особую актуальность. Электромагнитные силы в сплошной среде обычно ищут в виде четырехмерной дивергенции тензора энергии-импульса (ТЭИ) [1], играющего ключевую роль в данной проблеме. Проблему электромагнитных сил в сплошной среде можно разделить на две части. Первой из них является выбор формы ТЭИ взаимодействия ЭМП с веществом. Второй проблемой является выбор материальных уравнений, описывающих электромагнитные свойства среды. Настоящая статья посвящена решению первой проблемы, которая заключается в отсутствии однозначного ответа на вопрос о том, какая из многих форм тензора энергии-импульса (ТЭИ) является правильной. Наиболее часто обсуждаются формы ТЭИ Минковского и Абрагама. Это сделано, например, в статьях [1] - [10]. В статьях [1] - [3], [5], [8], [10] авторы проводят сравнительный анализ результатов, следующих из ТЭИ в формах Минковского и Абрагама для различных случаев, и отдают предпочтение форме Абрагама. В статьях [4], [6], [7], [9] показаны достоинства ТЭИ в форме Минковского и недостатки ТЭИ в форме Абрагама, который, по мнению авторов [4] и [6], не является релятивистски ковариантным, и потому отдается предпочтение форме Минковского. В работе [2] отмечается, что «в большинстве ситуаций результаты, получаемые на основе тензоров Абрагама и Минковского, совершенно тождественны». По мнению авторов [3] в рамках чисто макроскопического подхода не представляется возможным сделать однозначный выбор формы ТЭИ. Обширная библиография по данному вопросу приведена в работах [3], [4] и [7].

Обычно ТЭИ получают методом его построения из отдельных блоков. Из уравнений Максвелла и выражения для силы Лоренца с помощью теоремы Пойнтинга получают уравнения, интерпретируемые как уравнения сохранения энергии и импульса. Далее члены этих уравнений интерпретируются как производные компонентов ТЭИ. Этими «строительными блоками» ТЭИ являются плотность энергии и плотность импульса ЭМП, плотность потока энергии (вектор Умова-Пойнтинга), трехмерный тензор плотности потока импульса (или трехмерный тензор напряжений). Это метод получения ТЭИ, имеющий определенную свободу выбора его составных частей, приводит к тому, что его части иногда конструируются авторами из общих соображений и интерпретируются ими по-разному и естественно, что при этом возникают дискуссии. В результате таким методом были построены ТЭИ в формах Минковского, Герца – Хэвисайда, Абрагама, Гельмгольца - Абрагама, Абрагама – Бриллюэна – Питаевского, Полевого – Рытова и др. Этим формам ТЭИ соответствуют и свои формы представления электромагнитных сил. В отношении электромагнитных сил в работе [3] отмечается, что они находятся «несколько непоследовательным образом». Однако сами уравнения сохранения энергетических величин и уравнения баланса электромагнитных сил следуют из ТЭИ в виде его дивергенции. Это свойство можно использовать для сравнительного анализа тензоров и получения дополнительной информации, на основании которой можно сделать правильный выбор формы ТЭИ. В настоящей работе таким методом получены дополнительные аргументы, позволяющие по мнению автора закончить эту долголетнюю дискуссию и сделать однозначный выбор ТЭИ в форме Минковского. При рассмотрении этого вопроса среда считается неподвижной, однородной, изотропной, непроводящей и без дисперсии.

2. Тензоры энергии-импульса в электродинамике

Канонический ТЭИ запишем в общем виде:

$$\mathbf{T}_{\nu\mu} = \begin{bmatrix} W & i\frac{1}{c}\mathbf{S} \\ ic\cdot\mathbf{g} & t_{ik} \end{bmatrix} \qquad (\nu,\mu=0,1,2,3;\ \ i,k=1,2,3) \qquad (1)$$

где W – плотность энергии;

S – плотность потока энергии (вектор Умова-Пойнтинга);

g – плотность импульса;

$\mathbf{t}_{ik}$ – тензор плотности потока импульса (тензор напряжений).

Компоненты ТЭИ (1) в форме Минковского имеют вид [6]:

$$W = (\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{H}\cdot\mathbf{B})/8\pi \qquad \mathbf{S} = c\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})/4\pi$$

$$\mathbf{g}^M = (\mathbf{D}\times\mathbf{B})/4\pi\cdot c \qquad \mathbf{t}_{ik}^M = (E_i D_k + H_i B_k)/4\pi - \delta_{ik}(\mathbf{H}\cdot\mathbf{B})/8\pi\,.$$

Компоненты ТЭИ (1) в форме в форме Абрагама имеют вид:

$$W = (\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{H}\cdot\mathbf{B})/8\pi \qquad \mathbf{S} = c\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})/4\pi$$

$$\mathbf{g}^A = (\mathbf{E}\times\mathbf{H})/4\pi\cdot c \qquad \mathbf{t}_{ik}^A = (E_i D_k + E_k D_i + H_i B_k + H_k B_i)/8\pi - \delta_{ik}(\mathbf{H}\cdot\mathbf{B})/8\pi\,.$$

После подстановки компонентов в форме Абрагама, в ТЭИ (1), он становится симметричным.

2 Уравнения сохранения для электромагнитной энергии и импульса

Уравнения сохранения для электромагнитной энергии и импульса следуют из ТЭИ (1) в виде его дивергенции. В общем случае ТЭИ (1) является несимметричным и для каждого из его индексов можно записать по две группы уравнений (учитывая форму записи ТЭИ (1) здесь можно не различать ковариантные и контравариантные индексы):

$$а)\ \partial_\nu \mathbf{T}_{\nu\mu} = 0 \qquad и \qquad б)\ \partial_\mu \mathbf{T}_{\nu\mu} = 0$$

или $$а)\ \frac{1}{c}\partial_t W + c\cdot\nabla\cdot\mathbf{g} = 0 \quad \frac{1}{c^2}\partial_t \mathbf{S} - \partial_i t_{ik} = 0 \ \ и \ \ б)\ \partial_t W + \nabla\cdot\mathbf{S} = 0 \quad \partial_t \mathbf{g} - \partial_k t_{ik} = 0 \qquad (2)$$

Подставив в уравнения (2) компоненты ТЭИ в форме Минковского получим четыре уравнения сохранения:

- уравнение сохранения плотности энергии

$$\partial_t(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}+\mathbf{H}\cdot\mathbf{B})/8\pi\cdot c + \nabla\cdot(\mathbf{D}\times\mathbf{B})/4\pi = 0 \qquad (3)$$

- уравнение сохранения плотности потока энергии

$$\partial_t(\mathbf{E}\times\mathbf{H})/4\pi\cdot c - \partial_i((E_iD_k + H_iB_k)/4\pi - \delta_{ik}(\mathbf{H}\cdot\mathbf{B})/8\pi) = 0 \qquad (4)$$

- уравнение сохранения плотности энергии

$$\partial_t(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}+\mathbf{H}\cdot\mathbf{B})/8\pi\cdot c + \nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})/4\pi = 0 \qquad (5)$$

- уравнение сохранения плотности импульса

$$\partial_t(\mathbf{D}\times\mathbf{B})/4\pi\cdot c - \partial_k((E_iD_k + H_iB_k)/4\pi - \delta_{ik}(\mathbf{H}\cdot\mathbf{B})/8\pi) = 0 \qquad (6)$$

Из уравнений (4) и (6) следует, что тензор Минковского одновременно описывает изменения плотности электромагнитного импульса в формах Абрагама (4) и Минковского (6).

Из уравнений (3) и (5) следует уравнение:

$$\nabla\cdot(\mathbf{D}\times\mathbf{B})/4\pi = \nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})/4\pi \ \ или \ \ \nabla\cdot(\mathbf{D}\times\mathbf{B})/4\pi\cdot c = \nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})/4\pi\cdot c \ \ или \ \ \nabla\cdot\mathbf{g}^M = \nabla\cdot\mathbf{g}^A$$

Т.е. дивергенции плотности импульса в формах Минковского и Абрагама равны. Взяв производные по времени от обеих частей последнего уравнения получим:

$$\nabla\cdot\partial_t\mathbf{g}^M = \nabla\cdot\partial_t\mathbf{g}^A \ \ или \ \ \nabla\cdot(\partial_t\mathbf{g}^M - \partial_t\mathbf{g}^A) = 0$$

Выражение в скобках представляет собой силу Абрагама. Следовательно, из ТЭИ Минковского следует, что дивергенция силы Абрагама равна нулю.

Подставив в уравнения (2) компоненты ТЭИ в форме Абрагама и с учетом симметричности этого тензора получим уравнения сохранения:

- уравнение сохранения плотности энергии

$$\partial_t(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}+\mathbf{H}\cdot\mathbf{B})/8\pi\cdot c + \nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})/4\pi = 0$$

Это уравнение совпадает с уравнением (5), следующим из тензора Минковского.

- уравнение сохранения плотности импульса в форме Абрагама

$$\partial_t(\mathbf{E}\times\mathbf{H})/4\pi\cdot c - \partial_k((E_iD_k + E_kD_i + H_iB_k + H_kB_i)/8\pi - \delta_{ik}(\mathbf{H}\cdot\mathbf{B})/8\pi) = 0$$

или $$\partial_t\mathbf{g}^A = \partial_k((E_iD_k + E_kD_i + H_iB_k + H_kB_i)/8\pi - \delta_{ik}(\mathbf{H}\cdot\mathbf{B})/8\pi) \qquad (8)$$

- уравнение сохранения плотности потока энергии для тензора Абрагама

$$\frac{1}{c^2}\partial_t\mathbf{S} - \partial_i((E_iD_k + E_kD_i + H_iB_k + H_kB_i)/8\pi - \delta_{ik}(\mathbf{H}\cdot\mathbf{B})/8\pi) = 0$$

или $$\partial_t\mathbf{g}^A = \partial_i((E_iD_k + E_kD_i + H_iB_k + H_kB_i)/8\pi - \delta_{ik}(\mathbf{H}\cdot\mathbf{B})/8\pi) = 0 \qquad (9)$$

Это уравнение также является уравнением сохранения плотности импульса в форме Абрагама.

Таким образом, из тензора Минковского следуют уравнения сохранения плотности импульса в формах Минковского и Абрагама, а из тензора Абрагама следуют уравнения сохранения плотности импульса только в форме Абрагама. Отсюда следует, что тензор Абрагама, в отличие от тензора Минковского, не в полном объеме описывает энергетические процессы распространения электромагнитного поля в среде.

3. Электромагнитные силы в сплошной непроводящей среде

Электромагнитные силы, точнее плотности электромагнитных сил в сплошной непроводящей среде определяются в виде производных плотности электромагнитного импульса по времени $\partial_t \mathbf{g}$. Исходя из этого определения, при отсутствии сторонних сил, зарядов и токов, уравнения (4) и (6), следующие из тензора Минковского, можно рассматривать как уравнения баланса электромагнитных сил в среде. Уравнение (4) можно записать в виде:

$$\partial_t \mathbf{g}^A = \partial_t (\mathbf{E}\times\mathbf{H})/4\pi \cdot c = \partial_i ((E_i D_k + H_i B_k)/4\pi - \delta_{ik}(\mathbf{H}\cdot\mathbf{B})/8\pi) \qquad (10)$$

Уравнение (6) можно записать в виде:

$$\partial_t \mathbf{g}^M = \partial_t (\mathbf{D}\times\mathbf{B})/4\pi \cdot c = \partial_k ((E_i D_k + H_i B_k)/4\pi - \delta_{ik}(\mathbf{H}\cdot\mathbf{B})/8\pi) \qquad (11)$$

Электромагнитные силы в непроводящей среде определяются двумя величинами – индукцией электрического поля **D** и напряженностью магнитного поля **H**, которые, соответственно зависят от электрических и магнитных характеристик среды. Тогда уравнение (10), с плотностью импульса в форме Абрагама в которую входит напряженность магнитного поля **H**, описывает электромагнитные силы, связанные магнитными характеристиками среды, а уравнение (11), с плотностью импульса в форме Минковского в которую входит индукция электрического поля **D**, описывает электромагнитные силы, связанные электрическими характеристиками среды. Для краткости будем условно называть эти плотности электромагнитных сил соответственно магнитными и электрическими силами. Исходя из этого, можно заключить, что из ТЭИ в форме Минковского следует описание как электрических, так и магнитных сил в среде, т.е. электромагнитные силы описываются в полном объеме, а из ТЭИ в форме Абрагама следует описание только магнитных сил. Это еще раз подчеркивает неполноту тензора Абрагама. Электрические и магнитные силы имеют в общем случае различную величину, и разница в этих электромагнитных силах является силой Абрагама. Поскольку тензор Абрагама не содержит эту силу, то для получения правильных результатов его необходимо дополнять силой Абрагама [гинзбург с315]. В самом общем виде силу Абрагама записывают в виде разности выражений для изменения импульса в форме Минковского и в форме Абрагама [3]:

$$\mathbf{F}_A = \partial_t \mathbf{g}^M - \partial_t \mathbf{g}^A = \partial_t (\mathbf{D}\times\mathbf{B})/4\pi\cdot c - \partial_t (\mathbf{E}\times\mathbf{H})/4\pi\cdot c = \frac{1}{4\pi\cdot c}\partial_t (\mathbf{D}\times\mathbf{B} - \mathbf{E}\times\mathbf{H}) \qquad (12)$$

Из уравнений (10) и (11), следующих из тензора Минковского, силу Абрагама можно записать также в виде разности дивергенций его тензора напряжений t_{ik} :

$$\mathbf{F}_A = \partial_t \mathbf{g}^M - \partial_t \mathbf{g}^A = \partial_k \mathbf{t}_{ik} - \partial_i \mathbf{t}_{ik}$$

или

$$\mathbf{F}_A = \partial_k ((E_i D_k + H_i B_k)/4\pi - \delta_{ik}(\mathbf{H}\cdot\mathbf{B})/8\pi) - \partial_i ((E_i D_k + H_i B_k)/4\pi - \delta_{ik}(\mathbf{H}\cdot\mathbf{B})/8\pi)$$

или

$$\mathbf{F}_A = \frac{1}{4\pi\cdot c}\partial_t (\mathbf{D}\times\mathbf{B} - \mathbf{E}\times\mathbf{H}) = \frac{1}{4\pi}\nabla\times(\mathbf{E}\times\mathbf{D} + \mathbf{B}\times\mathbf{H}) \qquad (13)$$

Уравнение (13) подтверждает сделанный в разделе 2 вывод о том, что дивергенция силы Абрагама равна нулю. В этом уравнении для силы Абрагама, следующего из тензора Минковского, не налагается никаких ограничений на материальные уравнения, и оно является универсальным для любой непроводящей сплошной среды. Поскольку уравнение (13) следует из уравнений сохранения плотности импульса (4) и (6) его также можно считать уравнением сохранения плотности импульса. Из уравнения (13) следует важный вывод. Если среда описывается каноническими материальными уравнениями вида $\mathbf{D} = \varepsilon\cdot\varepsilon_0\cdot\mathbf{E}$ и $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu\cdot\mu_0$, а ε и μ являются постоянными или скалярными функциями, то векторы **D** и **E, H** и **B** коллинеарные и правая часть уравнения (13) с векторными произведениями этих векторов равна нулю. Тогда сила Абрагама равна нулю, а ТЭИ (1) является симметричным. Следовательно, часто применяемую для этого случая запись силы Абрагама в виде

$$\mathbf{F}_A = \frac{\varepsilon\cdot\mu - 1}{4\pi\cdot c}\partial_t (\mathbf{E}\times\mathbf{H})$$

следует приравнять к нулю. Для этого случая недиагональные компоненты тензора напряжений $\mathbf{t}_{ik}$ также равны нулю, а электромагнитные силы, действующие на среду, определяются только его диагональными членами. Тогда уравнение электромагнитных сил для этого случая можно записать в виде:

$$\mathbf{F} = \partial_t \mathbf{g}^M = \partial_t \mathbf{g}^A = \partial_t (\varepsilon\varepsilon_0 \mathbf{E}\times\mathbf{B})/4\pi\cdot c = \partial_t (\mathbf{E}\times\mathbf{B}/\mu\mu_0)/4\pi\cdot c = \frac{1}{8\pi\mu_0}\nabla(2\varepsilon\cdot\mathbf{E}^2/c^2 + \mathbf{B}^2/\mu)$$

Это выражение для электромагнитных сил следует и из ТЭИ Абрагама. Полученные уравнения найдены для неподвижной среды, но в силу релятивистской ковариантности ТЭИ Минковского, следующие из него уравнения, при использовании известных формул перехода, справедливы и для равномерно движущейся среды.

4 Заключение

Таким образом, из ТЭИ Минковского следуют уравнения сохранения плотности импульса в форме Минковского (6) и в форме Абрагама (4), а также уравнение (13) для силы Абрагама, показывающее, что ее дивергенция равна нулю. Из этого следует, что сам предмет дискуссии о том, какая из форм плотности импульса «правильнее», отсутствует и они обе правильны и равноценны, поскольку обе следуют из ТЭИ Минковского, чего нельзя сказать о ТЭИ в форме Абрагама. Образно говоря, эти две формы плотности импульса представляют собой «две стороны одной медали» и дополняют друг друга. Поскольку тензор Абрагама симметричен, то в отличие от тензора Минковского, получить непосредственно из него выражение для силы Абрагама через тензор напряжений не представляется возможным. В связи с этим тензор Абрагама дополняют силой Абрагама, найденной иным путем, после этого он считается идентичным тензору Минковского [2 с.317]. Только тогда его можно использовать и получить правильный результат. В связи с этим в работе [3 с. 185] отмечается, что сила Абрагама должна находиться «на основании опытных данных или каких-то расчетов, лежащих за пределами самих уравнений для макроскопического поля, из которых вытекает лишь закон сохранения или его непосредственные следствия». Это утверждение относится к тензору Абрагама, но не к тензору Минковского, содержащему всю необходимую информацию. Таким образом, по отношению к тензору Абрагама, сила Абрагама является неким сторонним «довеском», требующимся для обеспечения его правильности, а физическая суть этого «довеска» не определена, а для ее определения требуется выход за пределы уравнений макроскопического поля. По отношению к тензору Минковского, сила Абрагама по сути является его составной частью, ее физическая сущность и описание точно определены и прямо вытекают из тензора Минковского в виде уравнения (13), при этом не требуется выхода за пределы ТЭИ. Все это говорит о том, что предпочтение нужно однозначно отдать тензору Минковского, описывающему энергетические процессы и электромагнитные силы в среде, в том числе и силу Абрагама, в полном объеме. В настоящее время, в силу отсутствия окончательного выбора формы ТЭИ, часть исследователей, для развития электродинамики сплошных сред использует тензор Абрагама, что ввиду его неполноценности может привести к неправильным результатам и выводам. Автор надеется, что настоящая статья поможет сделать правильный выбор формы ТЭИ и развивать исследования в правильном направлении.

Список литературы

1. Скобельцын Д В *УФН* **110** 253 (1973); Skobel'tsyn D V Sov. Phys. Usp. **16** 381 (1973)
2. Гинзбург В Л *УФН* **110** 309 (1973); Ginzburg V L Sov. Phys. Usp. **16** 434 (1973)

3. Гинзбург В Л, Угаров В А *УФН* **118** 175 (1976); Ginzburg V L, Ugarov V A Sov. Phys. Usp. **19** 94 (1976)]
4. Веселаго В Г *УФН* **179** 689 (2009); Veselago V G Phys. Usp. **52** 649 (2009)
5. Макаров В П, Рухадзе А А *УФН* **179** 995 (2009); Makarov V P, Rukchadze A A Phys. Usp. **52** 937 (2009)
6. Веселаго В Г, Щавлев В В *УФН* **180** 331 (2010); Veselago V G, Shchavlev V V Phys. Usp. **53** 317 (2010)
7. Давидович М В *УФН* **180** 623 (2010); Davidovich M V Phys. Usp. **53** 595 (2010)
8. Макаров В П, Рухадзе А А *УФН* **181** 1357 (2011); Makarov V P, Rukchadze AA Phys. Usp. **54** 1285 (2011)
9. Веселаго В Г *УФН* **181** 1201 (2011); Veselago V G Phys. Usp. **54** 1161 (2011)
10. Топтыгин И Н, Левина К *УФН* **186** 146 (2016); Toptygin I N, Levina K Phys. Usp. **59** 141 (2016)