Três Exemplos de Energia Ilimitada para $t > 0$
(Three Examples of Unbounded Energy for $t > 0$)

Valdir Monteiro dos Santos Godoi
valdir.msgodoi@gmail.com

Sentindo vontade de resolver todas as equações importantes do mundo! 03-03-2016

Abstract – A solution to the 6th millenium problem, respect to breakdown of Navier-Stokes solutions and the bounded energy. We have proved that there are initial velocities $u^0(x)$ and forces $f(x,t)$ such that there is no physically reasonable solution to the Navier-Stokes equations for $t > 0$, which corresponds to the case (C) of the problem relating to Navier-Stokes equations available on the website of the Clay Institute. Three examples are given.

Keywords – Navier-Stokes equations, continuity equation, breakdown, existence, smoothness, physically reasonable solutions, gradient field, conservative field, velocity, pressure, external force, unbounded energy, millenium problem, uniqueness, non uniqueness, 15th Problem of Smale, blowup time.

§ 1 - Introdução

A segunda maneira que vejo para se provar a quebra de soluções (*breakdown solutions*) das equações de Navier-Stokes, seguindo o descrito em [1], refere-se à condição de energia limitada (*bounded energy*), a finitude da integral do quadrado da velocidade do fluido em todo o espaço.

Podemos certamente construir soluções de

(1) $$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \nu \nabla^2 u_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + f_i,\ 1 \le i \le 3,$$

que obedeçam à condição de divergente nulo para a velocidade (equação da continuidade para densidade de massa constante),

(2) $$div\, u \equiv \nabla \cdot u = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \qquad \text{(fluidos incompressíveis)}$$

e à condição inicial

(3) $$u(x,0) = u^0(x),$$

onde u_i, p, f_i são funções da posição $x \in \mathbb{R}^3$ e do tempo $t \ge 0, t \in \mathbb{R}$. A constante $\nu \ge 0$ é o coeficiente de viscosidade, p representa a pressão e $u = (u_1, u_2, u_3)$ é a velocidade do fluido, medidas na posição x e tempo t, com $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$. A função $f = (f_1, f_2, f_3)$ tem dimensão de aceleração ou força por unidade de massa, mas seguiremos denominando este vetor e suas componentes pelo nome genérico de força, tal como adotado em [1]. É a força externa aplicada ao fluido, por exemplo, gravidade.

As funções $u^0(x)$ e $f(x,t)$ devem obedecer, respectivamente,

(4) $|\partial_x^\alpha u^0(x)| \leq C_{\alpha K}(1+|x|)^{-K}$ sobre $\mathbb{R}^3$, para quaisquer $\alpha \in \mathbb{N}_0^3$ e $K \in \mathbb{R}$,

e

(5) $|\partial_x^\alpha \partial_t^m f(x,t)| \leq C_{\alpha m K}(1+|x|+t)^{-K}$ sobre $\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$, para quaisquer $\alpha \in \mathbb{N}_0^3$, $m \in \mathbb{N}_0$ e $K \in \mathbb{R}$,

com $\mathbb{N}_0 = \{0,1,2,3,\ldots\}$ (derivadas de ordem zero não alteram o valor da função), e uma solução (p,u) de (1) para que seja considerada fisicamente razoável deve ser contínua e ter todas as derivadas, de infinitas ordens, também contínuas (*smooth*), i.e.,

(6) $p, u \in C^\infty \qquad (\mathbb{R}^3 \times [0,\infty))$.

Dada uma velocidade inicial u^0 de classe C^∞ com divergente nulo (*divergence-free*, $\nabla \cdot u^0 = 0$) sobre $\mathbb{R}^3$ e um campo de forças externo f também de classe C^∞ sobre $\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$, quer-se, para que uma solução seja fisicamente razoável, além da validade de (6), que $u(x,t)$ não divirja para $|x| \to \infty$ e seja satisfeita a condição de energia limitada (*bounded energy*), i.e.,

(7) $\int_{\mathbb{R}^3} |u(x,t)|^2 dx < C$, para todo $t \geq 0$.

Vemos que todas as condições acima, de (1) a (7), precisam ser obedecidas para se obter uma solução (p,u) considerada fisicamente razoável, contudo, para se obter uma quebra de soluções, (1), (2), (3), (6) ou (7) poderiam não ser satisfeitas para algum $t \geq 0$, em alguma posição $x \in \mathbb{R}^3$, mantendo-se ainda a validade de (4) e (5).

Uma maneira de fazer com que esta situação (*breakdown*) ocorra é quando (1) não tem solução possível para a pressão $p(x,t)$, quando o campo vetorial $\phi: \mathbb{R}^3 \times [0,\infty) \to \mathbb{R}^3$ em

(8) $$\nabla p = \nu \, \nabla^2 u - \frac{\partial u}{\partial t} - (u \cdot \nabla)u + f = \phi$$

é não gradiente, não conservativo, em ao menos um $(x,t) \in \mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$. Nesse caso, para $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ ser não gradiente deve valer

(9) $$\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} \neq \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i}, \; i \neq j,$$

para algum par $(i, j), 1 \leq i, j \leq 3$, $x \in \mathbb{R}^3$ e tempo t não negativo (para mais detalhes veja, por exemplo, Apostol[2], cap. 10).

Se admitirmos, entretanto, que (1) tem solução (p, u) possível e esta também obedece (2), (3) e (6), a condição inicial $u^0(x)$ verifica (2) e (4), a força externa $f(x, t)$ verifica (5) e $u^0(x)$ e $f(x, t)$ são de classe C^∞, podemos tentar obter a condição de quebra de soluções em $t \geq 0$ violando-se a condição (7) de energia limitada (*bounded energy*), i.e., escolhendo-se $u^0(x)$ ou $u(x, t)$ que também obedeçam a

(10) $\int_{\mathbb{R}^3} |u(x, t)|^2 dx \to \infty$, para algum $t \geq 0$.

A descrição oficial do problema para este caso (C) de quebra de soluções é dada a seguir:

(C) Quebra das soluções da Equação de Navier-Stokes sobre $\mathbb{R}^3$. Para $\nu > 0$ e dimensão espacial $n = 3$ existem um campo vetorial suave e com divergência nula $u^0(x)$ sobre $\mathbb{R}^3$ e uma força externa suave $f(x, t)$ sobre $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$ satisfazendo

(4) $|\partial_x^\alpha u^0(x)| \leq C_{\alpha K}(1 + |x|)^{-K}$ sobre $\mathbb{R}^3$, $\forall \alpha, K$,

e

(5) $|\partial_x^\alpha \partial_t^m f(x, t)| \leq C_{\alpha m K}(1 + |x| + t)^{-K}$ sobre $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$, $\forall \alpha, m, K$,

tais que não existe solução (p, u) sobre $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$ satisfazendo (1), (2), (3), (6) e (7).

Vê-se claramente que podemos resolver este problema buscando velocidades válidas cuja integral do seu quadrado em todo o espaço $\mathbb{R}^3$ é infinito, ou também, conforme indicamos em (8), buscando funções ϕ não gradientes, onde a pressão p não poderá ser considerada uma função potencial, para algum instante $t \geq 0$. Entendemos que os α, m indicados em (4) e (5) só fazem sentido para $|\alpha|, m \in \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$ e os K negativos podem ser desprezados, pois não limitam o valor das funções u^0, f e suas derivadas quando $|x| \to \infty$ ou $t \to \infty$, com $C_{\alpha K}, C_{\alpha m K} > 0$.

§ 2 – O espaço de Schwartz S

A inequação (4) traz implicitamente que $u^0(x)$ deve pertencer ao espaço vetorial das funções de rápido decrescimento, que tendem a zero em $|x| \to \infty$, conhecido como espaço de Schwartz, $S(\mathbb{R}^3)$, em homenagem ao matemático francês Laurent Schwartz (1915-2002) que o estudou [3]. Estas funções e suas infinitas derivadas são contínuas (C^∞) e decaem mais rápido que o inverso de qualquer polinômio, tais que

$$\lim_{|x|\to\infty} |x|^k D^\alpha \varphi(x) = 0 \tag{11}$$

para todo $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, α_i inteiro não negativo, e todo inteiro $k \geq 0$. α é um multi-índice, com a convenção

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}, |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \alpha_i \in \{0, 1, 2, \dots\}. \tag{12}$$

D^0 é o operador identidade, D^α um operador diferencial. Um exemplo de função deste espaço é $u(x) = P(x)e^{-|x|^2}$, onde $P(x)$ é uma função polinomial.

Valem as seguintes propriedades [4]:

1) $S(\mathbb{R}^n)$ é um espaço vetorial; ele é fechado sobre combinações lineares.

2) $S(\mathbb{R}^n)$ é uma álgebra; o produto de funções em $S(\mathbb{R}^n)$ também pertence a $S(\mathbb{R}^n)$.

3) $S(\mathbb{R}^n)$ é fechado sobre multiplicação por polinômios.

4) $S(\mathbb{R}^n)$ é fechado sobre diferenciação.

5) $S(\mathbb{R}^n)$ é fechado sobre translações e multiplicação por exponenciais complexos ($e^{ix\cdot\xi}$).

6) funções de $S(\mathbb{R}^n)$ são integráveis: $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx < \infty$ para $f \in S(\mathbb{R}^n)$. Isto segue do fato de que $|f(x)| \leq M(1 + |x|)^{-(n+1)}$ e, usando coordenadas polares, $\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|)^{-(n+1)} dx = C \int_0^\infty (1 + r)^{-n-1}\, r^{n-1} dr < \infty$, i.e., o integrando decresce como r^{-2} (e $(1 + r)^{-2}$) no infinito e produz uma integral finita.

Da definição de $S(\mathbb{R}^3)$ e propriedades anteriores vemos que, como $u^0(x) \in S(\mathbb{R}^3)$, então $\int_{\mathbb{R}^3} |u^0(x)| dx \leq \int_{\mathbb{R}^3} M(1 + |x|)^{-4} dx \leq C \int_0^\infty (1 + r)^{-2}\, dr < \infty$ e quadrando $|u^0(x)|$ e $M(1 + |x|)^{-4}$ chegamos à desigualdade $\int_{\mathbb{R}^3} |u^0(x)|^2 dx < \infty$, que contradiz (10).

Outra forma de verificar isso é que o conjunto $S(\mathbb{R}^n)$ está contido em $L^p(\mathbb{R}^n)$ para todo p, $1 \leq p < \infty$ ([5]-[9]), e em particular para $p = 2$ e $n = 3$ segue a finitude de $\int_{\mathbb{R}^3} |u^0(x)|^2 dx$.

Portanto, se a condição (7) for desobedecida, conforme propomos neste artigo, será para $t > 0$, por exemplo, encontrando alguma função $u(x, t)$ da forma

$u^0(x)v(x,t)$, $v(x,0)=1$, ou $u^0(x)+v(x,t)$, $v(x,0)=0$, com $\int_{\mathbb{R}^3}|v(x,t)|^2dx \to \infty$ e $\int_{\mathbb{R}^3}|u(x,t)|^2dx \to \infty$.

§ 3 – Exemplo 1

De fato, escolhendo $u^0(x) \in S(\mathbb{R}^3)$ e $f(x,t) \in S(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty))$, obedecendo-se assim (4) e (5), lembrando-se que não precisamos ter $u,p \in S(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty))$ como solução, apenas $u,p \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty))$, então é possível construir uma solução para a velocidade da forma $u(x,t)=u^0(x)e^{-t}+v(t)$, com $v(0)=0$, tal que $\int_{\mathbb{R}^3}|u(x,t)|^2dx \to \infty$, pois, quando $\int_{\mathbb{R}^3}[|u^0(x)|^2e^{-t}+2u^0(x)\cdot v(t)]dx \geq 0$, por exemplo, quando cada componente de $u^0(x)$ tem o mesmo sinal da respectiva componente de $v(t)$ ou o produto entre elas é zero ou $\int_{\mathbb{R}^3}u^0(x)\cdot v(t)dx \geq 0$, teremos $\int_{\mathbb{R}^3}|u(x,t)|^2dx \geq \int_{\mathbb{R}^3}|v(t)|^2dx = |v(t)|^2\int_{\mathbb{R}^3}dx \to \infty$, com $v(t) \neq 0, t>0$. Também devemos escolher u, u^0 tais que $\nabla \cdot u = \nabla \cdot u^0 = 0$.

Em especial, escolhamos, para $1 \leq i \leq 3$,

(13.1) $$u^0(x)=e^{-(x_1^2+x_2^2+x_3^2)}(x_2x_3, x_1x_3, -2x_1x_2),$$

(13.2) $$v_i(t)=w(t)=e^{-t}(1-e^{-t}),$$

(13.3) $$u_i(x,t)=u_i^0(x)e^{-t}+v_i(t),$$

(13.4) $$f_i(x,t)=\left(-u_i^0+e^{-t}\sum_{j=1}^3 u_j^0\frac{\partial u_i^0}{\partial x_j}+\sum_{j=1}^3 v_j\frac{\partial u_i^0}{\partial x_j}-\nu\nabla^2u_i^0\right)e^{-t},$$

o que resulta para $p(x,t)$, como a única incógnita ainda a determinar,

(14) $$\nabla p+\frac{\partial v}{\partial t}=0,$$

e então

(15) $$p(x,t)=-\frac{dw}{dt}(x_1+x_2+x_3)+\theta(t).$$

A pressão obtida tem uma dependência temporal genérica $\theta(t)$, que deve ser de classe $C^\infty([0,\infty))$ e podemos supor limitada, e diverge no infinito ($|x| \to \infty$), mas tenderá a zero em todo o espaço com o aumento do tempo (a menos eventualmente de $\theta(t)$), devido ao fator e^{-t} que aparece na derivada de $w(t)$,

(16) $$\frac{dw}{dt}=e^{-t}(2e^{-t}-1).$$

Neste exemplo $\int_{\mathbb{R}^3} u^0(x) \cdot v(t) dx = 0$, e assim $\int_{\mathbb{R}^3} |u(x,t)|^2 dx \to \infty$ para $t > 0$, como queríamos. Mais simples ainda seria escolher $u^0(x) = 0$.

Interessante observarmos que não ocorre nenhuma descontinuidade na velocidade, nem singularidade (divergência: $|u| \to \infty$), entretanto a energia cinética total em todo o espaço diverge, $\int_{\mathbb{R}^3} |u|^2\, dx \to \infty$. Tivemos como dados de entrada $u^0 \in L^2(\mathbb{R}^3), f \in L^2\big(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)\big)$, mas por solução $u \notin L^2\big(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)\big)$, assim como $p \notin L^2\big(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)\big)$.

§ 4 – Exemplo 2 – Ideia Geral

Outro exemplo interessante, utilizando a mesma velocidade inicial anterior, mas fazendo v depender explicitamente das coordenadas de posição x_1, x_2 nas direções e_1, e_2, além do tempo t, e ser igual a zero na direção e_3, com $v(x,0) = 0$, $\nabla \cdot v = 0$, $v \not\equiv 0$ (v não identicamente nulo), e que também obedece a todas as condições de (1) a (6), é, para $1 \le i \le 3$,

(17.1) $\quad u^0(x) = e^{-(x_1^2+x_2^2+x_3^2)}(x_2x_3, x_1x_3, -2x_1x_2),$

(17.2) $\quad v(x,t) = e^{-t} w(x,t),$

(17.3) $\quad w(x,t) = (w_1(x_1,x_2,t), w_2(x_1,x_2,t), 0),$

$\quad w(x,0) = 0,\ \nabla \cdot w = 0,\ w_3 = v_3 = 0,\ w \not\equiv 0,$

(17.4) $\quad u_i(x,t) = u_i^0(x)e^{-t} + v_i(x,t) = [u_i^0(x) + w_i(x,t)]e^{-t},$

(17.5) $$f_i(x,t) = \left(-u_i^0 + e^{-t} \sum_{j=1}^3 [u_j^0 \frac{\partial u_i^0}{\partial x_j} + u_j^0 \frac{\partial w_i}{\partial x_j} + w_j \frac{\partial u_i^0}{\partial x_j}] - \nu \nabla^2 u_i^0\right) e^{-t}$$
$$= \left(-u_i^0 + \sum_{j=1}^3 [e^{-t} u_j^0 \frac{\partial u_i^0}{\partial x_j} + u_j^0 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_j \frac{\partial u_i^0}{\partial x_j}] - \nu \nabla^2 u_i^0\right) e^{-t},$$

o que resulta para $p(x,t)$, como a única incógnita ainda a determinar,

(18) $$\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \nu \nabla^2 v_i,$$

as equações de Navier-Stokes sem força externa.

Nós sabemos que para $n = 2$ a equação (18) tem solução cuja existência e unicidade já está provada ([10]-[13]), sendo assim, transformemos nosso sistema tridimensional (18) em um sistema bidimensional em v, o que fornecerá como solução uma pressão p e uma velocidade v, *a priori*, com domínio espacialmente bidimensional, i.e., nas variáveis (x_1, x_2, t). Resolvida, por hipótese, a equação (18) acima, com $v(x,0) = 0$, $\nabla \cdot v = 0$, mas v não identicamente nula, acrescentemos a terceira coordenada espacial $v_3 \equiv 0$ na solução definitiva para $u(x,t)$, espacialmente tridimensional, em (17.4), e calculemos a força externa em (17.5). Escolhendo $v \in S(\mathbb{R}^2 \times [0,\infty))$ ou v polinomial, seno, cosseno ou suas somas para ser usada em (18), garantiremos que $f \in S(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$, obedecendo-se (5), com $u^0 \in S(\mathbb{R}^3)$, conforme (4). Fazendo que v seja limitada em módulo (norma) faremos com que u não divirja em $|x| \to \infty$, que é uma condição fisicamente razoável e desejável em [1]. Construamos então uma velocidade v não identicamente nula, com $v(x, 0) = 0$, $\nabla \cdot v = 0$, tal que seja relativamente simples resolver (18), que seja limitada em módulo, possa (de preferência) tender a zero no infinito em ao menos determinadas situações e se possível ser integrável em $\mathbb{R}^2$, seja de classe C^∞ e satisfaça (5).

A equação (18) admitirá ainda uma dependência temporal genérica para a pressão da forma

(19) $$p(x, t) = p_1(x_1, x_2, t) + \theta(t),\ x \in \mathbb{R}^3,$$

i.e., além da solução convencional p_1 para a pressão do problema bidimensional das equações de Navier-Stokes (18) nas variáveis independentes (x_1, x_2, t), acrescente-se a p uma parcela genérica $\theta(t)$ dependente apenas do tempo e/ou uma constante como a solução definitiva da pressão no problema tridimensional original, conforme já vimos em (15).

A infinitude da energia cinética total, neste segundo exemplo, ocorre devido à integração de uma função bidimensional ($|v|^2$ ou $|w|^2$) não identicamente nula no espaço tridimensional infinito ($\mathbb{R}^3$).

A energia cinética total do problema é, para $v = e^{-t}w$,

(20) $$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} |u|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^3} (e^{-2t}|u^0|^2 + 2e^{-t}u^0 \cdot v + |v|^2) dx \\ &= e^{-2t} \int_{\mathbb{R}^3} (|u^0|^2 + 2u^0 \cdot w + |w|^2) dx.\end{aligned}$$

Embora $\int_{\mathbb{R}^3} (|u^0|^2 + 2u^0 \cdot w) dx$ seja finito, das propriedades das funções pertencentes ao espaço de Schwartz e integráveis (o caso $u^0 = 0$ é elementar), a terceira parcela em (20) divergirá em $\mathbb{R}^3$ para $v, w \not\equiv 0$, ainda que possa convergir e ser finita em $\mathbb{R}^2$, ou seja, se $|v|$ não for identicamente nulo e $t > 0$,

(21) $$\int_{\mathbb{R}^3} |v|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |v|^2 dx \right) dx_3 = C_2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_3 \to \infty,$$

donde, para t estritamente positivo e finito,

(22) $$\int_{\mathbb{R}^3} |u|^2 dx \to \infty, t > 0, v \not\equiv 0,$$

a violação da condição (7).

§ 5 – Exemplo 2 – Solução Exata

Vamos agora resolver (18) de maneira explícita, primeiramente no domínio $\mathbb{R}^2 \times [0, \infty)$. No exemplo 3 seu domínio será $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$. Mostraremos que uma solução do tipo

(23) $$v(x_1, x_2, t) = (X(x_1 - x_2)T(t),\ X(x_1 - x_2)T(t)),$$

com uma pressão dada tal que

(24) $$\frac{\partial p}{\partial x_1} = -\frac{\partial p}{\partial x_2} = aQ(x_1 - x_2)R(t) + b,$$

a, b constantes, $a \neq 0, Q$ função da diferença das coordenadas espaciais, R função do tempo, Q, R funções não identicamente nulas, resolve (18) e elimina seu termo não linear, e nesse caso se $T(0) = 0$ resolve-se (17) e o sistema (1), (2), (3) original. X e T não identicamente nulas, evidentemente.

Se $v_i = v_j = V$ em (18), teremos para os seus termos não lineares

(25) $$\sum_{j=1}^{3} v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{3} V \frac{\partial V}{\partial x_j} = V \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial V}{\partial x_j}.$$

Fazendo $\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial V}{\partial x_j} = 0$ em (25) elimina-se então o termo não linear, igualdade que é verdadeira quando a condição necessária de fluídos incompressíveis imposta por nós, $\nabla \cdot v = 0$, é satisfeita, i.e.,

(26) $$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial V}{\partial x_j} = 0.$$

Definindo $V(x, t) = X\big(\xi(x)\big)T(t)$, com $x \in \mathbb{R}^n$, então

(27)
$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_j} = T(t) \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial X(\xi(x))}{\partial x_j} = T(t) \sum_{j=1}^{n} X'(\xi) \frac{\partial \xi(x)}{\partial x_j} = T(t)X'(\xi) \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \xi(x)}{\partial x_j}.$$

Funções $\xi(x)$ tais que $\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \xi(x)}{\partial x_j} = 0$ resultarão então em $\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_j} = 0$, conforme (27), a exemplo de $\xi = x_1 - x_2$ em dimensão espacial $n = 2$, tal qual utilizado em (23).

Substituindo (24) em (18), já sem os termos não lineares $\sum_{j=1}^{3} v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$, e por simplicidade fazendo $a = 1, b = 0$, vem

(28) $$Q(x_1 - x_2)R(t) + \frac{\partial V}{\partial t} = \nu \nabla^2 V,$$

com $V = X(x_1 - x_2)T(t)$. Transformamos assim um sistema de n equações diferenciais parciais não lineares em uma única equação diferencial parcial linear.

Definindo $\xi = x_1 - x_2$, a equação (28) fica

(29) $$Q(\xi)R(t) + X(\xi)\frac{dT}{dt} = \nu T\nabla^2 X(\xi).$$

Queremos obter uma função $T(t)$ tal que $T(0) = 0$, para que em $t = 0$ tenhamos $v(x, 0) = 0$, conforme (23). Escolhamos, por exemplo, dentre infinitas outras possibilidades,

(30) $$T(t) = (1 - e^{-t})e^{-t},$$

função limitada no intervalo $0 \leq T(t) \leq 1,\ t \geq 0$, que vai a zero para $t \to \infty$.

Assim, de (29), com

(31) $$\frac{dT}{dt} = e^{-t}(2e^{-t} - 1),$$

vem

(32) $$Q(\xi)R(t) + X(\xi)e^{-t}(2e^{-t} - 1) = \nu(1 - e^{-t})e^{-t}\nabla^2 X(\xi).$$

Definindo $Q(\xi) = X(\xi)$ em (32), a fim de separar nossa equação com o tradicional método de separação de variáveis usado na teoria de E.D.P.,

(33) $$[R(t) + e^{-t}(2e^{-t} - 1)]X(\xi) = \nu(1 - e^{-t})e^{-t}\nabla^2 X(\xi).$$

A equação diferencial parcial linear (33) pode ser resolvida por algumas alternativas de combinações:

(34) $$\begin{cases} R(t) + e^{-t}(2e^{-t} - 1) = \pm\nu(1 - e^{-t})e^{-t} \\ X(\xi) = \pm\nabla^2 X(\xi) \end{cases}$$

ou

(35) $$\begin{cases} R(t) + e^{-t}(2e^{-t} - 1) = \pm(1 - e^{-t})e^{-t} \\ X(\xi) = \pm\nu\nabla^2 X(\xi) \end{cases}$$

ou de forma mais geral, com $\nu_1 \cdot \nu_2 = \nu > 0,\ \nu_1, \nu_2 > 0$,

(36) $$\begin{cases} R(t) + e^{-t}(2e^{-t} - 1) = \pm\nu_1(1 - e^{-t})e^{-t} \\ X(\xi) = \pm\nu_2\nabla^2 X(\xi) \end{cases}$$

A equação diferencial de segunda ordem em X nos sistemas acima, dependendo de qual dos sinais usemos em $\pm$, remete-nos à Equação de Helmholtz (sinal negativo) ou a algum movimento em estado estacionário regido pela Equação de Schrödinger independente do tempo (sinal positivo ou negativo).

Não pretendendo usar nenhuma condição de contorno específica para $X(\xi)$ e que nos faça recorrer às séries e integrais de Fourier, escolhemos aqui o sinal negativo em $\pm$ (a opção deve ser a mesma nas duas equações do sistema), e façamos X ser uma função trigonométrica, soma de seno e cosseno em ξ, i.e.,

(37) $$X(\xi) = A\, cos(B\xi) + C\, sen(D\xi).$$

Com $\xi = x_1 - x_2$ temos

(38) $$\begin{aligned}\nabla^2 X &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)[A\, cos(B\xi) + C\, sen(D\xi)] \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}[A\, cos(B\xi) + C\, sen(D\xi)] + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}[A\, cos(B\xi) + C\, sen(D\xi)] \\ &= -2[AB^2\, cos(B\xi) + CD^2\, sen(D\xi)].\end{aligned}$$

De $X(\xi) = -\nu_2 \nabla^2 X(\xi)$ em (36) vem

(39) $$\nu_2 = \frac{1}{2B^2} = \frac{1}{2D^2},\ \nu_1 = 2B^2\nu = 2D^2\nu,\ \ |B| = |D|,$$

quaisquer que sejam os valores de A e C (se $A = C = 0$ ou $B = D = 0$ teremos a solução trivial e indesejada $v(x,t) \equiv 0$).

A solução para $R(t)$ que se obtém é então, usando $\nu_1 = 2B^2\nu$ dado em (39) e o sinal negativo em (36),

(40) $$R(t) = -e^{-t}[2B^2\nu(1 - e^{-t}) + 2e^{-t} - 1],$$

valendo $R(0) = -1$.

De (23), (30) e (37) chega-se, como um caso possível de solução, para $x \in \mathbb{R}^3$ e introduzindo implicitamente a terceira coordenada espacial $v_3 \equiv 0$ em v, a

(41) $$\begin{aligned}v(x,t) &= X(x_1 - x_2)T(t)(1{,}1{,}0) \\ &= [A\, cos(B\xi) + C\, sen(\pm B\xi)](1 - e^{-t})e^{-t}(1,1,0),\end{aligned}$$

que como podemos perceber não é de fato uma solução única para a velocidade, devido às infinitas possibilidades que tivemos para definir a dependência temporal $T(t)$, bem como a dependência espacial $X(\xi)$, $\xi = x_1 - x_2$, além das constantes arbitrárias A, B, C em (41). Mesmo sem unicidade de solução, ela satisfaz aos requisitos que esperávamos: é limitada, contínua de classe C^∞, igual a zero no instante inicial, tende a zero com o aumento do tempo, e tem divergente nulo ($\nabla \cdot v = 0$). Além disso, quando utilizada na expressão (17.5) obtida para a força externa, não retira da força f a condição de pertencer ao espaço de Schwartz em relação ao espaço $\mathbb{R}^3$ e ao tempo, i.e., $f \in S(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty))$, conforme é possível provar das propriedades de S que vimos na seção § 2 anterior.

A pressão é obtida integrando-se (24) em relação à diferença $\xi = x_1 - x_2$, com $a = 1, b = 0, Q(\xi) = X(\xi)$ e $R(t)$ dado em (40),

(42) $$p(x,t) - p_0(t) = R(t)\int_{\xi_0}^{\xi} Q(\xi)d\xi + \theta(t)$$
$$= -e^{-t}[2B^2\nu(1-e^{-t}) + 2e^{-t} - 1]\,S(\xi) + \theta(t),$$
$$S(\xi) = \frac{A}{B}[sen(B\xi) - sen(B\xi_0)] \pm \frac{A}{B}[cos(\pm B\xi) - cos(\pm B\xi_0)],$$

onde ξ_0 é a superfície $\xi = \xi_0$ e onde a pressão é p_0 no instante t. Novamente vemos que esta solução não é única, não apenas devido exclusivamente à função $\theta(t)$, mas também devido às constantes arbitrárias A e B, o sinal $\pm$, além da maneira como $R(t)$ e $Q(\xi)$ foram obtidas, com certa liberdade de possibilidades. $\theta(t)$ é nossa função genérica do tempo, ou uma constante, que deve ser de classe $C^\infty([0,\infty))$ e podemos supor limitada.

Completando a solução principal (p,u) que buscamos para a equação (1), temos finalmente

(43) $$u(x,t) = u^0(x)e^{-t} + v(x,t),$$

com $u^0(x)$ dado em (17.1), $v(x,t)$ em (41) e $f(x,t)$ em (17.5).

A velocidade (secundária) v que escolhemos torna a velocidade (principal) u uma função com algumas propriedades semelhantes a ela: u é limitada oscilante, contém uma soma de seno e cosseno em relação à diferença das coordenadas espaciais, e decai exponencialmente em relação ao tempo, ou seja, não pertence a um espaço de Schwartz em relação à posição, nem é de quadrado integrável (violando assim a inequação (7) em $t > 0$), mas é contínua de classe C^∞ e não diverge quando $|x| \to \infty$. Seu comportamento em relação a $x_1 - x_2$ e a divergência da energia cinética total, obviamente, não retiram de $f(x,t)$ a condição de ser pertencente a $S(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty))$, equivalente à inequação (5), já que esta só depende de $u^0(x)$ e $v(x,t)$. Também temos $v(x,0) = 0$, $\nabla \cdot v = 0$, $v \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty))$, a validade de (1), (2), (3), (4) e (6), $u(x,0) = u^0(x)$, $u^0 \in S(\mathbb{R}^3)$, com $\nabla \cdot u = 0$ e $u \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty))$, conforme queríamos.

§ 6 – A não unicidade em dimensão espacial $n = 2$

O que há com as provas de unicidade das soluções das equações de Navier-Stokes em dimensão espacial $n = 2$?

Não sendo possível analisar todas as provas existentes, é possível ao menos entender que tais provas não devem levar em consideração a ausência do termo não linear nas Equações de Navier-Stokes, $\sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \equiv ((u \cdot \nabla)u)_i$, $1 \le i \le n$, e foi a esta ausência que recorremos em nosso segundo exemplo.

Semelhantemente a esta causa, também se percebe que diferentes equações do tipo de Navier-Stokes, com ausência de um ou mais termos da respectiva equação completa, e que não obstante tenham a mesma condição inicial $u(x,0)=u^0(x)$, terão provavelmente, no caso geral, diferentes soluções $u(x,t)$ entre elas, e assim não poderá haver unicidade de solução em relação à equação de Navier-Stokes completa, com todos os termos. Se todas apresentassem sempre a mesma e única solução, bastaria para nós resolver somente a mais simples delas, por exemplo, $\nabla p=-\frac{\partial u}{\partial t}$ ou $\nabla p=\nu\nabla^2 u$ (Equação de Poisson se $\nabla p\not\equiv 0$ ou de Laplace se $\nabla p\equiv 0$) ou $\frac{\partial u}{\partial t}=\nu\nabla^2 u$ (Equação do Calor com $\nabla p=0$), todas com $u(x,0)=u^0(x)$, e conferir se a soma dos demais termos faltantes é igual a zero ao aplicar a solução u obtida na equação reduzida. Se sim, a solução da equação reduzida é também solução da equação completa. Importante exemplo desta ausência são as Equações de Euler, que diferem das Equações de Navier-Stokes pela ausência do operador diferencial nabla aplicado a u, $\nabla^2 u\equiv\Delta u$, devido ao coeficiente de viscosidade ser nulo, $\nu=0$.

É fácil provar que as três equações acima, assim como a equação $\nabla p+\frac{\partial u}{\partial t}=\nu\nabla^2 u$, não podem realmente ter uma única solução, dada apenas a condição inicial para a velocidade $u(x,0)=u^0(x)$. Pelo contrário, a forma completa das equações de Navier-Stokes, onde supomos que $\sum_{j=1}^{n}u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\equiv((u\cdot\nabla)u)_i\not\equiv 0,\ 1\le i\le n$, tem unicidade de solução para $n=2$ e em ao menos um pequeno intervalo de tempo não nulo $[0,T]$ para $n=3$, onde T é conhecido como *blowup time*. Acrescentemos em todas estas equações a condição de incompressibilidade, $\nabla\cdot u=0$.

Trata-se assim de um interessante problema de Análise Combinatória aplicada à Análise Matemática e Física-Matemática.

§ 7 – Unicidade em dimensão espacial $n=2$

Verificamos na seção § 5 que o sistema

$$(44)\qquad \begin{cases}\nabla p+\frac{\partial v}{\partial t}=\nu\nabla^2 v\\ (v\cdot\nabla)v=0\\ \nabla\cdot v=0\\ v(x,0)=0\end{cases}$$

tem infinitas soluções para a velocidade da forma

$$(45)\qquad v(x,t)=X(\xi)T(t)(1,1),\xi=x_1-x_2,$$

com $T(0)=0$, não obstante existem as provas conhecidas da unicidade de

$$(46) \qquad \begin{cases} \nabla p + \frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v = \nu \nabla^2 v \\ \nabla \cdot v = 0 \\ v(x,0) = 0 \end{cases}$$

contradizendo o que obtivemos.

Sem ser necessário nos demorarmos nas provas conhecidas, expondo todos os seus detalhes, repetindo suas passagens, é possível constatar em Leray [10], Ladyzhenskaya [11], Kreiss and Lorenz [14], dentre outros, que as provas de existência e unicidade baseiam-se na forma completa das equações de Navier-Stokes, por exemplo (46), e não em uma forma desmembrada das equações de Navier-Stokes, como (44).

As equações de Navier-Stokes sem força externa com $n = 2$ são (usando $x \equiv x_1$ e $y \equiv x_2$)

$$(47) \qquad \begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial y} = \nu \nabla^2 u_1 \\ \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} = \nu \nabla^2 u_2 \end{cases}$$

Podemos dispor o sistema acima de forma parecida com um sistema de equações lineares,

$$(48) \qquad \begin{cases} u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial y} = \nu \nabla^2 u_1 - \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial t} \\ u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} = \nu \nabla^2 u_2 - \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial t} \end{cases}$$

e a seguir em forma de uma equação matricial,

$$(49) \qquad \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu \nabla^2 u_1 - \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial t} \\ \nu \nabla^2 u_2 - \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial t} \end{pmatrix}.$$

Chamando

$$(50) \qquad A = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$(51) \qquad U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$(52) \qquad B = \begin{pmatrix} \nu \nabla^2 u_1 - \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial t} \\ \nu \nabla^2 u_2 - \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial t} \end{pmatrix}$$

a solução para U da equação (49), $AU = B$, é

(53) $$U = A^{-1}B,$$

que para existir e ter solução única deve-se ter

(54) $$\det A = \frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial u_2}{\partial y} - \frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{\partial u_2}{\partial x} \neq 0,$$

ou seja,

(55) $$\frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial u_2}{\partial y} \neq \frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{\partial u_2}{\partial x},$$

regra que também deve ser obedecida para $t = 0$ (de novo pode nos levar aos casos (C) e (D) de [1] aplicando-se o método em matriz 3×3, i.e., $n = 3$).

Se usarmos a condição de incompressibilidade $\nabla \cdot u = 0$,

(56) $$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0,$$

i.e.,

(57) $$\frac{\partial u_1}{\partial x} = -\frac{\partial u_2}{\partial y},$$

transforma-se a condição (55) em

(58) $$-\left(\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)^2 \neq \frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{\partial u_2}{\partial x},$$

ou equivalentemente,

(59) $$-\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2 \neq \frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{\partial u_2}{\partial x}.$$

Como esta condição deve ser válida para todo t, em $t = 0$ deve-se obedecer a

(60) $$-\left(\frac{\partial u_1^0}{\partial x}\right)^2 \neq \frac{\partial u_1^0}{\partial y}\frac{\partial u_2^0}{\partial x}$$

e

(61) $$-\left(\frac{\partial u_2^0}{\partial y}\right)^2 \neq \frac{\partial u_1^0}{\partial y}\frac{\partial u_2^0}{\partial x},$$

usando $u(x, y, 0) = u^0(x, y) = (u_1^0(x, y), u_2^0(x, y))$.

Se a velocidade inicial u^0 for tal que sejam desobedecidas (60) ou (61) então ou não haverá solução para o sistema (47) (sistema impossível) ou não haverá uma única solução (sistema indeterminado), tal como na teoria de sistemas lineares.

Definindo

$$(62)\qquad U_1 = \begin{pmatrix} \nu\nabla^2 u_1 - \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial t} & \frac{\partial u_1}{\partial y} \\ \nu\nabla^2 u_2 - \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial t} & \frac{\partial u_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

e

$$(63)\qquad U_2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \nu\nabla^2 u_1 - \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial t} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} & \nu\nabla^2 u_2 - \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial t} \end{pmatrix},$$

a solução para u_1, u_2 será

$$(64)\qquad u_1 = \frac{\det U_1}{\det A}$$

e

$$(65)\qquad u_2 = \frac{\det U_2}{\det A}.$$

Sendo

$$(66)\qquad \det U_1 = \left(\nu\nabla^2 u_1 - \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial t}\right)\frac{\partial u_2}{\partial y} - \left(\nu\nabla^2 u_2 - \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial t}\right)\frac{\partial u_1}{\partial y}$$

e

$$(67)\qquad \det U_2 = \left(\nu\nabla^2 u_2 - \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial t}\right)\frac{\partial u_1}{\partial x} - \left(\nu\nabla^2 u_1 - \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial t}\right)\frac{\partial u_2}{\partial x},$$

com $\det A$ dado em (54), temos então

$$(68)\qquad u_1 = \frac{\det U_1}{\det A} = \frac{\left(\nu\nabla^2 u_1 - \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial t}\right)\frac{\partial u_2}{\partial y} - \left(\nu\nabla^2 u_2 - \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial t}\right)\frac{\partial u_1}{\partial y}}{\frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial u_2}{\partial y} - \frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{\partial u_2}{\partial x}}$$

e

$$(69)\qquad u_2 = \frac{\det U_2}{\det A} = \frac{\left(\nu\nabla^2 u_2 - \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial t}\right)\frac{\partial u_1}{\partial x} - \left(\nu\nabla^2 u_1 - \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial t}\right)\frac{\partial u_2}{\partial x}}{\frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial u_2}{\partial y} - \frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{\partial u_2}{\partial x}}.$$

Usando a equação de incompressibilidade no determinante de A,

(70) $$u_1 = -\frac{\left(\nu\nabla^2 u_1 - \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial t}\right)\frac{\partial u_2}{\partial y} - \left(\nu\nabla^2 u_2 - \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial t}\right)\frac{\partial u_1}{\partial y}}{\left(\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{\partial u_2}{\partial x}}$$

e

(71) $$u_2 = -\frac{\left(\nu\nabla^2 u_2 - \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial t}\right)\frac{\partial u_1}{\partial x} - \left(\nu\nabla^2 u_1 - \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial t}\right)\frac{\partial u_2}{\partial x}}{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{\partial u_2}{\partial x}}.$$

É verdade que as soluções (equações) acima são tão ou mais complicadas quanto às equações originais (47), e parece não haver utilidade em resolvê-las.

Mas desta forma complicada se pode chegar com mais certeza à seguinte constatação: as equações de Navier-Stokes (e Euler) têm uma simetria entre as variáveis, tanto as dependentes quanto as independentes.

A simetria neste caso de $n = 2$ é

(72.1) $u_1 \leftrightarrow u_2$

(72.2) $x \leftrightarrow y$

ficando p e t inalterados:

(73.1) $p \leftrightarrow p$

(73.2) $t \leftrightarrow t$.

Isso sugere, se não resolve completamente, a questão da solução destas equações. Se as equações em si são simétricas em relação a determinadas transformações, então esperamos que suas soluções também o sejam sob estas transformações. O mesmo método pode ser aplicado também para $n \geq 3$, com a regra (por exemplo)

(74.1) $u_i \mapsto u_{i+1}$, $u_{n+1} \equiv u_1$,

(74.2) $x_i \mapsto x_{i+1}$, $x_{n+1} \equiv x_1$,

(74.3) $p \leftrightarrow p$,

(74.4) $t \leftrightarrow t$.

É de se esperar que a condição inicial $u(x, 0) = u^0(x)$ deva obedecer também a estas simetrias, mas permanece inalterada a condição de incompressibilidade: $\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u_i^0}{\partial x_i} = 0$.

Se fornecemos $u_2(x, y, t)$ como dado de entrada no nosso sistema então devemos esperar que a solução para u_1, supostamente simétrica a u_2 pela regra (72) anterior, seja

(75) $$u_1(x, y, t) = u_2(y, x, t),$$

i.e., trocamos x por y, e vice-versa, na solução dada previamente para u_2 e igualamos a u_1 o resultado desta transformação. Restará obter a pressão p ou então, caso ela também tenha sido dada, verificar se as variáveis u_1, u_2, p realmente satisfazem o sistema original.

A forma geral da solução para a pressão p, que deve satisfazer

(76) $$\nabla p + \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u = \nu \nabla^2 u,$$

é

(77) $$p - p_0(t) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \left[\nu \nabla^2 u - \frac{\partial u}{\partial t} - (u \cdot \nabla)u\right] \cdot dl + \theta(t),$$

onde supomos que na posição $(x, y) = (x_0, y_0)$ e no instante t a pressão é igual a $p_0(t)$. A integração se dá em qualquer caminho entre (x_0, y_0) e (x, y), pois a pressão deve ser uma função potencial do integrando de (77) para que (47) tenha solução.

É de se esperar também que p seja simétrica em relação às variáveis x e y, ou seja,

(78) $$p(x, y, t) = p(y, x, t),$$

assim como em 3 dimensões, usando $x \equiv x_1, y \equiv x_2, z \equiv x_3$,

(79) $$p(x, y, z, t) = p(y, z, x, t) = p(z, x, y, t).$$

Finalmente então, desenvolvidas as considerações anteriores, nosso exemplo 3, que busca uma solução única para o sistema de Navier-Stokes em $n = 3$, com todos os termos da equação, força externa não nula, e que fornece energia cinética total infinita para o sistema (1) a (6) em $t > 0$, será baseado no exemplo 2, mas precisaremos novamente recorrer à ausência do termo não linear na equação auxiliar com $n = 3$. Uma vez que (18), a Equação de Navier-Stokes sem força externa, tem como condição inicial a velocidade inicial nula, a única velocidade possível para sua solução com todos os termos é também a velocidade nula, devido à unicidade das soluções na forma completa desta equação (abstraindo-se de pressões genéricas constantes e/ou funções do tempo), solução que não nos interessa. Sendo assim, precisaremos novamente que (18) não tenha o termo não linear. A unicidade da solução da equação principal em três dimensões, entretanto, ao menos em pequeno intervalo de tempo, é garantida por esta conter todos os termos (novamente, exceção feita à pressão não única), inclusive a força externa aplicada (que por si depende da solução não única da equação auxiliar com $n = 3$).

§ 8 – Exemplo 3

O terceiro exemplo é uma generalização do exemplo 2, com as componentes de velocidade v_2 e v_3 proporcionais à componente v_1,

(80.1) $$v_1 = X(\xi)T(t),\ \xi = x_1 + \frac{1}{\alpha}x_2 - 2\frac{1}{\beta}x_3,\ \alpha \neq 0,\ \beta \neq 0,$$

(80.2) $$v_2 = \alpha v_1,$$

(80.3) $$v_3 = \beta v_1,$$

α e β constantes não nulas. Também poderíamos usar outras combinações de coeficientes nas variáveis x_i em ξ, desde que $\nabla \cdot (\xi I) = 0$, com $I = (1, 1,1)$. No exemplo 2 usamos $\alpha = 1,\ \beta = 0$.

Vamos escolher as componentes da velocidade inicial u^0 com alguma propriedade de simetria. Não é fácil pensar em velocidades não constantes com componentes simétricas u_i^0 e ao mesmo tempo cujo divergente $\nabla \cdot u^0$ seja nulo. As velocidades com simetria cuja i-ésima componente não contém a i-ésima coordenada espacial, para todo i (natural) em $1 \leq i \leq n$, cumprem este requisito: $\frac{\partial u_i^0}{\partial x_i} = 0$. Alternativamente podemos utilizar a conhecida igualdade vetorial $\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = 0$, ou seja, escolher um vetor u^0 que tenha um potencial vetor $\boldsymbol{A}$, i.e., $u^0 = \nabla \times \boldsymbol{A}$. Então escolhamos primeiramente um vetor $\boldsymbol{A}$ que tenha as propriedades de simetria que esperamos.

Seja $\boldsymbol{A} = (A_1, A_2, A_3)$ o potencial vetor que queremos. Fazendo $A_1 = A_2 = A_3 = e^{-r^2}$, com $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, o valor que atribuímos para a velocidade inicial $u^0(x)$ será

(81) $$u^0(x) = rot\,\boldsymbol{A} = 2e^{-r^2}(-x_2 + x_3, -x_3 + x_1, -x_1 + x_2).$$

Seguindo as equações 17 do exemplo 2, façamos agora para $x \in \mathbb{R}^3$,

(82.1) $$v(x,t) = e^{-t}w(x,t),$$
(82.2) $$w(x,t) = \big(w_1(x_1,x_2,x_3,t), w_2(x_1,x_2,x_3,t), w_3(x_1,x_2,x_3,t)\big),$$
$$w(x,0) = 0,\ \nabla \cdot w = 0,\ w \not\equiv 0,$$
(82.3) $$u_i(x,t) = u_i^0(x)e^{-t} + v_i(x,t) = [u_i^0(x) + w_i(x,t)]e^{-t},$$
(82.4) $$f_i(x,t) = \left(-u_i^0 + e^{-t}\sum_{j=1}^{3}[u_j^0\frac{\partial u_i^0}{\partial x_j} + u_j^0\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + w_j\frac{\partial u_i^0}{\partial x_j}] - \nu\nabla^2 u_i^0\right)e^{-t}$$
$$= \left(-u_i^0 + \sum_{j=1}^{3}[e^{-t}u_j^0\frac{\partial u_i^0}{\partial x_j} + u_j^0\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_j\frac{\partial u_i^0}{\partial x_j}] - \nu\nabla^2 u_i^0\right)e^{-t},$$

o que resulta para $p(x,t)$ e $v(x,t)$, como incógnitas ainda a determinar,

(83) $$\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{\partial v_i}{\partial t}+\sum_{j=1}^{3} v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}=\nu\nabla^2 v_i,$$

as equações de Navier-Stokes sem força externa.

As equações (80) aplicadas em (83) resultam em

(84) $$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x_1}+\frac{\partial v_1}{\partial t}+v_1\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\alpha\frac{\partial v_1}{\partial x_2}+\beta\frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right)=\nu\nabla^2 v_1 \\ \frac{\partial p}{\partial x_2}+\alpha\frac{\partial v_1}{\partial t}+\alpha v_1\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\alpha\frac{\partial v_1}{\partial x_2}+\beta\frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right)=\nu\alpha\nabla^2 v_1 \\ \frac{\partial p}{\partial x_3}+\beta\frac{\partial v_1}{\partial t}+\beta v_1\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\alpha\frac{\partial v_1}{\partial x_2}+\beta\frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right)=\nu\beta\nabla^2 v_1 \end{cases}$$

Como

(85) $$\begin{aligned}\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\alpha\frac{\partial v_1}{\partial x_2}+\beta\frac{\partial v_1}{\partial x_3}&=T(t)\frac{dX}{d\xi}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x_1}+\alpha\frac{\partial \xi}{\partial x_2}+\beta\frac{\partial \xi}{\partial x_3}\right)\\ &=T(t)\frac{dX}{d\xi}(1+1-2)=0,\end{aligned}$$

pela definição de ξ que usamos em (80.1), então (84) fica

(86) $$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x_1}+\frac{\partial v_1}{\partial t}=\nu\nabla^2 v_1 \\ \frac{\partial p}{\partial x_2}+\alpha\frac{\partial v_1}{\partial t}=\alpha\nu\nabla^2 v_1 \\ \frac{\partial p}{\partial x_3}+\beta\frac{\partial v_1}{\partial t}=\beta\nu\nabla^2 v_1 \end{cases}$$

ou equivalentemente,

(87) $$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x_1}=\nu\nabla^2 v_1-\frac{\partial v_1}{\partial t} \\ \frac{\partial p}{\partial x_2}=\alpha\left[\nu\nabla^2 v_1-\frac{\partial v_1}{\partial t}\right]=\alpha\frac{\partial p}{\partial x_1} \\ \frac{\partial p}{\partial x_3}=\beta\left[\nu\nabla^2 v_1-\frac{\partial v_1}{\partial t}\right]=\beta\frac{\partial p}{\partial x_1} \end{cases}$$

Semelhantemente ao que vimos na seção § 5, equação (24), para $a=1$ e $b=0$, vamos fazer a pressão ser definida como

(88) $$\frac{\partial p}{\partial \xi}=Q(\xi)R(t),$$

e a velocidade

(89) $$v_i=c_i\,X\big(\xi(x)\big)\,T(t),\ \ c_1=1, c_2=\alpha, c_3=\beta,$$

com ξ definido em (80.1),

(90) $$\xi = x_1 + \frac{1}{\alpha} x_2 - 2\frac{1}{\beta} x_3, \ \alpha \neq 0, \ \beta \neq 0.$$

Será suficiente então, além da equação (88) para a pressão, resolvermos uma única equação diferencial parcial linear, envolvendo v_1, ao invés de um sistema de três equações diferenciais parciais não lineares, para v_1, v_2, v_3.

O desenvolvimento da solução aqui segue os mesmos passos já vistos na seção § 5, equações (29) a (43), sendo a principal mudança a expressão para ξ dada em (90), com o aumento de dimensões e a proporcionalidade entre v_2, v_3 e v_1. Chegamos a

(91) $$\begin{aligned} v(x,t) &= X\left(x_1 + \frac{1}{\alpha} x_2 - 2\frac{1}{\beta} x_3\right) T(t)(1, \ \alpha, \ \beta) \\ &= [A\, cos(B\xi) + C\, sen(\pm B\xi)](1 - e^{-t})e^{-t}(1, \ \alpha, \ \beta), \ \alpha, \beta \neq 0, \end{aligned}$$

mantendo-se válidas as soluções (42) e (43) para a pressão e velocidade u, respectivamente. Velocidade inicial igual a (81). Também temos a validade de $\nabla \cdot v = 0$ e a correspondente integral $\int_{\mathbb{R}^3} |v|^2 dx$ infinita, parcela da energia cinética total do sistema (1) a (6).

§ 9 – Conclusão

Todos os três exemplos obedecem às condições de divergência nula (*divergence-free*, $\nabla \cdot u^0 = 0$), suavidade (*smoothness*, C^∞) e derivadas parciais de u^0 e f da ordem de $C_{\alpha K}(1 + |x|)^{-K}$ e $C_{\alpha m K}(1 + |x| + t)^{-K}$, respectivamente. Concluímos que deve ser $u^0 \in S(\mathbb{R}^3)$ e $f \in S(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$. Para cada $u(x,t)$ possível tal que (3) seja verdadeira, a força externa $f(x,t)$ e a pressão $p(x,t)$ podem ser convenientemente construídas, na classe C^∞, verificando (8), e de modo a satisfazerem todas as condições necessárias, encontrando-se assim uma solução possível para (1), (2), (3), (4), (5) e (6), e apenas (7) não seria satisfeita, para $t > 0$, conforme (10). Mostramos então exemplos de quebra de soluções para o caso (C) deste problema do milênio. Estes exemplos, entretanto, não levam ao caso (A) de [1], de existência e suavidade das soluções, justamente por violarem (7) (O caso (A) também impõe que seja nula a força externa, $f = 0$).

Um resumo das condições do problema está listado abaixo ($: \mathbb{R}^3$ e $: \mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$ representam o domínio das respectivas funções).

$\nu > 0, n = 3$		
$\exists u^0(x): \mathbb{R}^3$		smooth (C^∞), divergence-free ($\nabla \cdot u^0 = 0$)
$\exists f(x,t): \mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$		smooth (C^∞)
(4)	$\lvert \partial_x^\alpha u^0(x) \rvert \leq C_{\alpha K}(1 + \lvert x \rvert)^{-K}: \mathbb{R}^3,\ \forall \alpha, K$	
(5)	$\lvert \partial_x^\alpha \partial_t^m f(x,t) \rvert \leq C_{\alpha m K}(1 + \lvert x \rvert + t)^{-K}: \mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$, $\forall \alpha, m, K$	
$\nexists (p, u): \mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$ /		
(1)	$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \nu \nabla^2 u_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + f_i(x,t), 1 \leq i \leq 3\ \ (x \in \mathbb{R}^3, t \geq 0)$	
(2)	$\nabla \cdot u = 0$	
(3)	$u(x, 0) = u^0(x) \qquad (x \in \mathbb{R}^3)$	
(6)	$p, u \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$	
(7)	$\int_{\mathbb{R}^3} \lvert u(x,t) \rvert^2 dx < C, \forall t \geq 0$	(bounded energy)

Em todos os três exemplos a velocidade principal u que utilizamos foi da forma

(92) $$u(x,t) = u^0(x)[1 + w(x)(1 - e^{-t})]e^{-t};$$

no exemplo 1, $w(x) = 1$, no exemplo, 2 $w(x) = X(\xi)(1,1,0)$, $\xi = x_1 - x_2$, e no exemplo 3, $w(x) = X(\xi)(1, \alpha, \beta)$, $\xi = x_1 + \frac{1}{\alpha} x_2 - 2\frac{1}{\beta} x_3$, exemplos 2 e 3 com $X(\xi) = [A\ cos(B\xi) + C\ sen(\pm B\xi)]$.

É importante analisarmos também a questão da unicidade das soluções. Como $u^0(x)$ e $f(x,t)$ são dados, escolhidos por nós, de classe C^∞ e satisfazendo (4) e (5), i.e., pertencentes ao espaço de Schwartz, com $\nabla \cdot u^0 = 0$, afirmar que não existe solução (p, u) para o sistema (1), (2), (3), (6) e (7) pode pressupor que exploramos, ou provamos para, as infinitas combinações possíveis de p e de u, i.e., de (p, u). Sendo assim, precisamos que haja unicidade de solução para cada velocidade que construímos, o que elimina outras velocidades possíveis para os mesmos dados utilizados, $u^0(x)$ e $f(x,t)$, e que implicassem em energia cinética total finita.

A unicidade da solução (a menos da pressão $p(x,t)$ com o termo adicional constante ou dependente do tempo $\theta(t)$, além de outros casos de não unicidade sobre x e $T(t)$) vem dos resultados clássicos já conhecidos, descritos por exemplo no mencionado artigo de Fefferman [1]: o sistema das equações de Navier-Stokes (1), (2), (3) tem solução única para todo $t \geq 0$ ou apenas para um intervalo de tempo $[0, T)$ finito dependente dos dados iniciais, onde T é chamado de "*blowup time*". Quando há uma solução com T finito então a velocidade u torna-se ilimitada próxima do "*blowup time*".

Vemos que a existência de cada solução nossa, nos exemplos dados, está garantida por construção e substituição direta. Nossas velocidades não apresentam nenhum comportamento irregular, em instante t algum, em posição alguma, que as tornem ilimitadas, infinitas, nem mesmo para $t \to \infty$ ou $|x| \to \infty$, sendo assim, não pode haver o "*blowup time*" nos exemplos que demos, portanto cada solução encontrada nos casos anteriores é única em todo tempo (a menos da pressão). Mas ainda que houvesse um T finito (em [14], [15] vemos que $T > 0$), a unicidade existiria em pelo menos um pequeno intervalo de tempo, o que já é suficiente para mostrar que neste intervalo ocorre a quebra das soluções de Navier-Stokes por ser desobedecida a condição de energia cinética limitada (7), tornando o caso (C) verdadeiro.

Entendamos que a unicidade está na velocidade principal u (equação 1), não sendo preciso que esteja também na velocidade secundária v (equações 14, 18 e 83), que conforme vimos nos exemplos 2 e 3 pode ter infinitas soluções, devido à ausência dos n termos não lineares $\sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$. Escolhida uma velocidade v, entretanto, aplicando-a na força externa f (equações 13.4, 17.5, 82.4), resulta enfim na unicidade de u (conforme 13.3, 17.4, 43, 82.3), solução de uma equação com todos os termos, de sua energia cinética, e na correspondente divergência da energia cinética total $\int_{\mathbb{R}^3} |u|^2 \, dx$ em $t > 0$ devido ao termo $\int_{\mathbb{R}^3} |v|^2 \, dx \to \infty$. A pressão p, já sabemos, não é única, mas esta não altera, qualitativamente, o fato da energia cinética total do sistema ser infinita ou não. Isto é mais fácil de perceber com os exemplos 1 e 2: fosse v qualquer função constante, ou dependente exclusivamente do tempo, ou com $x \in \mathbb{R}$ ou com $x \in \mathbb{R}^2$, desde que não identicamente nula, e qualquer que fosse a pressão p, nula ou não, a condição (7) seria violada, devido à integração de $|v|^2$ em todo o espaço $\mathbb{R}^3$.

§ 10 – Comentários Finais

Não é difícil estender o resultado obtido anteriormente na seção § 5 com a velocidade bidimensional para uma velocidade v com três componentes espaciais não nulas, conforme vimos na seção § 8.

Nos exemplos 2 e 3 tivemos que resolver uma equação diferencial ordinária para obter $X(\xi)$. Vamos agora, entretanto, achar uma solução não única para a velocidade nas Equações de Navier-Stokes, mas sem precisar resolver nenhuma equação diferencial auxiliar. Só será preciso efetuar uma integração, necessária à obtenção da pressão. A título de curiosidade, a velocidade inicial poderá ser diferente de zero, assim como a força externa aplicada, e não estaremos preocupados em buscar apenas energias cinéticas infinitas ou velocidades pertencentes ao espaço de Schwartz. Não estamos buscando agora uma *breakdown solution*, pelo contrário, buscamos infinitas *solutions*.

Vamos resolver o sistema (1), (2), (3) para o caso especial em que

(93) $$u(x_1,x_2,x_3,t) = X(x_1+x_2+x_3)T(t)\,(1,1,-2) = X(\xi)T(t)J,$$
$$\xi(x) = x_1+x_2+x_3,\ J=(1,1,-2),$$

valendo $\nabla\cdot(\xi J)=0$. Isso nos dá $\nabla\cdot u = \nabla\cdot u^0 = 0$ e a eliminação dos termos não lineares $(u\cdot\nabla)u \equiv \left(\sum_{j=1}^{3} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j},\right)_{1\le i\le 3} = 0$ das Equações de Navier-Stokes, com ou sem força externa. Assim a solução de (1) será reduzida à solução de uma equação diferencial parcial linear, a Equação do Calor não homogênea tridimensional,

(94) $$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \nu\nabla^2 u_i - \frac{\partial u_i}{\partial t} = \phi_i,\ 1\le i\le 3,$$

devendo valer

(95) $$\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i},\ i\ne j.$$

Como $\frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial p}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x_i} = \frac{\partial p}{\partial \xi}$, $\forall i$, assim como os operadores diferenciais $\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial \xi}$ e $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2 = \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^2$, $\forall i$, i.e., temos uma pressão que pode ser expressa como função de ξ, assim como as componentes da velocidade u, e os x_i apresentam-se de forma simétrica e linear em relação a $\xi = x_1+x_2+x_3$, com a transformação do elemento infinitesimal de integração $d\xi = \frac{\partial \xi}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial \xi}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial \xi}{\partial x_3}dx_3 = dx_1+dx_2+dx_3$, a igualdade (95) é verdadeira, é válido $\frac{\partial^2 p}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j}$, e teremos a seguinte solução para a pressão:

(96) $$p(x,t) - p_0(t) = \int_{\xi_0}^{\xi(x)} \left(\nu \mathrm{T}\nabla^2 X - X\frac{dT}{dt} + f\right) d\xi + \theta(t),$$

com

(97) $$\frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{\partial p}{\partial x_2} = \frac{\partial p}{\partial x_3},$$

supondo que a força $f(x,t)$ seja da forma $Y(\xi)Z(t)(1,1,-2)$, tal qual $u(x,t) = X(\xi)T(t)(1,1,-2)$. Consideremos $p_0(t)$ como a pressão no instante t e na superfície $\xi = \xi_0$. Isto resolve o sistema que pretendíamos, desde que a integração em (96) seja possível, e assim não precisamos resolver nenhuma equação diferencial ordinária intermediária para encontrarmos $X(\xi)$, pois podemos prefixar qual a expressão para $X(\xi)$ que desejamos utilizar, dentre infinitas possibilidades, e tal que tenhamos $u(x,0) = u^0(x)$.

Outras combinações das componentes do vetor J podem ser usadas, assim como outras combinações dos coeficientes dos x_1, x_2, x_3 em ξ, desde que eliminem-se os termos não lineares e verifique-se (2) e (95). Assim sendo, formas mais complicadas para ξ também são possíveis, além das lineares, o que traz uma robusta maneira de se obter as soluções para u. Por exemplo, definindo-se

(98) $$u_i = \alpha_i(x,t)u_1, \; 1 \le i \le n, \; \alpha_1 = 1,$$

a condição a ser obedecida por X e ξ a fim de se eliminar os termos não lineares é

(99) $$\alpha_i \frac{dX(\xi)}{d\xi} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \frac{\partial \xi}{\partial x_j} + X(\xi) \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} = 0,$$

para todo i (natural) em $1 \le i \le n$. Para cada determinado i elimina-se o termo não linear da respectiva linha (ou coordenada) i se (99) for satisfeita.

Uma maneira de fazer (99) ser verdadeira é quando

(100) $$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \frac{\partial \xi}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j} = 0.$$

Quando os α_i são constantes ou dependentes apenas do tempo a condição a ser obedecida para ξ é

(101) $$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \frac{\partial \xi}{\partial x_j} = 0,$$

o que está de acordo com os exemplos 2 e 3 anteriores.

Incluindo-se ainda a condição de incompressibilidade para u, deve ser válida também a relação

(102) $$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial(\alpha_j u_1)}{\partial x_j} &= u_1 \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \frac{\partial u_1}{\partial x_j} \\ &= T(t)[X(\xi) \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_j} + \frac{dX(\xi)}{d\xi} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \frac{\partial \xi}{\partial x_j}] = 0. \end{aligned}$$

Como (102) deve ser válida para todo t, então precisamos que seja

(103) $$X(\xi) \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_j} + \frac{dX(\xi)}{d\xi} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \frac{\partial \xi}{\partial x_j} = 0.$$

Quando os α_j são constantes ou dependentes apenas do tempo a condição a ser obedecida para ξ é igual à condição (101) anterior,

(104) $$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \frac{\partial \xi}{\partial x_j} = 0.$$

Observemos que a função $T(t)$ em (93) não deve ter singularidades no caso de se desejar que a velocidade u seja regular, limitada em módulo (norma), não obstante, $T(t)$ singular, infinita para um ou mais valores do tempo t, pode ser considerada como um "marcador" de *blowups*, e assim podemos construir soluções com instantes de *blowup* τ_* bem determinados, à nossa vontade, tais que $T(\tau_*) \to \infty$.

Na ausência de singularidades de $T(t)$ e $X(\xi(x))$, entretanto, desejando apenas velocidades regulares, conclui-se que é possível a uma equação de Navier-Stokes tridimensional (em geral, n-dimensional) *"bem comportada"* ter mais de uma solução para a mesma velocidade inicial. Da especial forma dada à solução $u(x,t)$ em (93), com $T(0) = 0$, para uma mesma velocidade inicial $u(x,0) = X\big(\xi(x)\big)T(0)J = 0$, com $J = (1,1,-2)$, é possível gerar, em princípio, infinitas velocidades diferentes $u(x,t) = X(\xi(x))T(t)J$, para diferentes funções da posição $X(\xi(x))$ e do tempo $T(t)$, que resolvem a equação de Navier-Stokes (18) sem força externa. Isso remete à resposta negativa ao 15º problema de Smale [12], como já havíamos visto anteriormente pensando apenas na não unicidade da pressão devido ao termo adicional $\theta(t) + q$, onde $q \neq 0$ é uma constante e $\theta(t)$ uma função explícita do tempo (no problema original de Smale a pressão não varia no tempo).

Em próximo artigo o correspondente à seção § 7 em três dimensões.

Grato, amigo Deus. Pela paz entre as religiões, e entre as pessoas.

Dedico este artigo à memória de John Nash.

Referências

[1] Fefferman, Charles L., *Existence and Smoothness of the Navier-Stokes Equation*, in http://www.claymath.org/sites/default/files/navierstokes.pdf (2000).

[2] Apostol, Tom M., *Calculus*, vol. II. New York: John Wiley & Sons (1969).

[3] Schwartz, Laurent, *Théorie des Distributions*. Paris: Hermann, Éditeurs des Sciences et des Arts (1966).

[4] Strichartz, Robert, *A Guide to Distribution Theory and Fourier Transforms*. Florida: CRC Press Inc. (1994).

[5] https://en.wikipedia.org/wiki/Schwartz_space (acessed in 01-28-2016).

[6] http://mathworld.wolfram.com/SchwartzSpace.html (acessed in 01-28-2016).

[7] http://www.math.washington.edu/~hart/m526/Lecture3.pdf (01-28-2016).

[8] Gjestland, Frederik Joachim, *Distributions, Schwartz Space and Fractional Sobolev Spaces*, Master's Thesis of Science in Physics and Mathematics, Norwegian University of Science and Technology, Department of Mathematical Sciences, in http://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:664088/FULLTEXT01.pdf (2013).

[9] Kinani, Abdellah El, and Oudadess, Mohamed, *Distribution Theory and Applications*. Singapore: World Scientific (2010).

[10] Leray, Jean, *Sur Le Mouvement d'un Liquide Visqueux Emplissant L'Espace*, Acta Mathematica **63**, 193-248 (1934).

[11] Ladyzhenskaya, Olga A., *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*. New York: Gordon and Breach Science Publishers (1969).

[12] Smale, Steve, *Mathematical Problems for the Next Century*, Mathematical Intelligencer **20** (2): 7-15 (1998).

[13] Constantin, Peter, *Some open problems and research directions in the mathematical study of fluid dynamics*, Mathematics Unlimited – 2001 and Beyond, 353-360. Berlin: Springer-Verlag (2001).

[14] Kreiss, Heinz-Otto, and Lorenz, Jens, *Initial-Boundary Value Problems and the Navier-Stokes Equations*. San Diego: Academic Press Inc. (1989).

[15] Leray, Jean, *Aspects de la mécanique théorique des fluides*, La Vie des Sciences **11**, 287-290 (1994). See https://www.tmna.ncu.pl/static/files/v12n2-01.pdf