

Una Reformulación de la Mecánica Clásica

Antonio A. Blatter

Licencia Creative Commons Atribución 3.0

(2015) Buenos Aires

Argentina

Este trabajo presenta una reformulación de la mecánica clásica que es invariante bajo transformaciones entre sistemas de referencia inerciales y no inerciales y que puede ser aplicada en cualquier sistema de referencia sin necesidad de introducir las fuerzas ficticias.

Introducción

La posición inercial \mathbf{r} , la velocidad inercial \mathbf{v} y la aceleración inercial \mathbf{a} de una partícula, están dadas por:

$$\mathbf{r} \doteq (\vec{r} - \mathbf{R})$$

$$\mathbf{v} \doteq (\vec{v} - \mathbf{V}) - \boldsymbol{\omega} \times (\vec{r} - \mathbf{R})$$

$$\mathbf{a} \doteq (\vec{a} - \mathbf{A}) - 2 \boldsymbol{\omega} \times (\vec{v} - \mathbf{V}) + \boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times (\vec{r} - \mathbf{R})] - \boldsymbol{\alpha} \times (\vec{r} - \mathbf{R})$$

donde \vec{r} es el vector de posición de la partícula, $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{\alpha}$ son la velocidad angular y la aceleración angular del free-system (ver Anexo) \mathbf{R} , \mathbf{V} y \mathbf{A} son la posición, la velocidad y la aceleración del centro de masa del free-system ($\mathbf{v} \doteq d(\mathbf{r})/dt$) y ($\mathbf{a} \doteq d^2(\mathbf{r})/dt^2$)

Un sistema de referencia S es no rotante si la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ del free-system respecto a S es igual a cero y además S es inercial si la aceleración \mathbf{A} del centro de masa del free-system respecto a S es igual a cero.

La fuerza neta \mathbf{F} que actúa sobre una partícula m produce una aceleración inercial \mathbf{a} , según la siguiente ecuación:

$$\mathbf{F} = m \mathbf{a}$$

Los sistemas de referencia inerciales y no inerciales no deben introducir las fuerzas ficticias sobre \mathbf{F} .

Las magnitudes m , \mathbf{r} , \mathbf{v} , \mathbf{a} y \mathbf{F} son invariantes bajo transformaciones entre sistemas de referencia inerciales y no inerciales.

Dinámica Lineal

La dinámica lineal para una simple partícula m , está dada por:

$$\text{Momento L1} \quad \mathbf{P}_{L1} \doteq m [(\mathbf{v})]$$

$$\text{Momento L2} \quad \mathbf{P}_{L2} \doteq m [(\mathbf{v}) |\mathbf{r}|]$$

$$\text{Momento L3} \quad \mathbf{P}_{L3} \doteq m [(\mathbf{v})/|\mathbf{r}|]$$

$$\text{Energía Cinética L1} \quad K_{L1} \doteq 1/2 m [(\mathbf{v})^2]$$

$$\text{Energía Cinética L2} \quad K_{L2} \doteq 1/2 m [(\mathbf{v})^2 (\mathbf{r})^2]$$

$$\text{Energía Cinética L3} \quad K_{L3} \doteq 1/2 m [(\mathbf{v})^2 / (\mathbf{r})^2]$$

$$\text{Energía Potencial L1} \quad U_{L1} \doteq - [(\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r})]$$

$$\text{Energía Potencial L2} \quad U_{L2} \doteq - [(\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}) (\mathbf{r})^2]$$

$$\text{Energía Potencial L3} \quad U_{L3} \doteq - [(\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}) / (\mathbf{r})^2]$$

$$\text{Energía Mecánica L1} \quad E_{L1} \doteq K_{L1} + U_{L1}$$

$$\text{Energía Mecánica L2} \quad E_{L2} \doteq K_{L2} + U_{L2}$$

$$\text{Energía Mecánica L3} \quad E_{L3} \doteq K_{L3} + U_{L3}$$

$$\text{Lagrangiano L1} \quad L_{L1} \doteq K_{L1} - U_{L1}$$

$$\text{Lagrangiano L2} \quad L_{L2} \doteq K_{L2} - U_{L2}$$

$$\text{Lagrangiano L3} \quad L_{L3} \doteq K_{L3} - U_{L3}$$

Si sobre m sólo actúan fuerzas conservativas entonces E_{L1} , E_{L2} y E_{L3} se conservan.

Del momento lineal \mathbf{P}_{L1} se obtiene la fuerza lineal (\mathbf{F}_{L1}) más sencilla para utilizar,

$$\mathbf{F}_{L1} \doteq d(\mathbf{P}_{L1})/dt = m d(\mathbf{v})/dt = m \mathbf{a} = \mathbf{F}$$

El momento lineal \mathbf{P}_{L1} de un sistema aislado de partículas se conserva si las fuerzas internas del sistema obedecen la tercera ley de Newton en su forma débil ($\sum_i \mathbf{F}_i = 0$)

Dinámica Radial

La dinámica radial para una simple partícula m , está dada por:

$$\text{Momento R1} \quad P_{R1} \doteq m [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})/|\mathbf{r}|]$$

$$\text{Momento R2} \quad P_{R2} \doteq m [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})]$$

$$\text{Momento R3} \quad P_{R3} \doteq m [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})/(\mathbf{r})^2]$$

$$\text{Energía Cinética R1} \quad K_{R1} \doteq 1/2 m [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2/(\mathbf{r})^2]$$

$$\text{Energía Cinética R2} \quad K_{R2} \doteq 1/2 m [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2]$$

$$\text{Energía Cinética R3} \quad K_{R3} \doteq 1/2 m [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2/(\mathbf{r})^4]$$

$$\text{Energía Potencial R1} \quad U_{R1} \doteq - [(\int [2 \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}] d^{1/2}(\mathbf{r})^2)/(\mathbf{r})^2]$$

$$\text{Energía Potencial R2} \quad U_{R2} \doteq - [(\int [2 \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}] d^{1/2}(\mathbf{r})^2)]$$

$$\text{Energía Potencial R3} \quad U_{R3} \doteq - [(\int [2 \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}] d^{1/2}(\mathbf{r})^2)/(\mathbf{r})^4]$$

$$\text{Energía Mecánica R1} \quad E_{R1} \doteq K_{R1} + U_{R1}$$

$$\text{Energía Mecánica R2} \quad E_{R2} \doteq K_{R2} + U_{R2}$$

$$\text{Energía Mecánica R3} \quad E_{R3} \doteq K_{R3} + U_{R3}$$

$$\text{Lagrangiano R1} \quad L_{R1} \doteq K_{R1} - U_{R1}$$

$$\text{Lagrangiano R2} \quad L_{R2} \doteq K_{R2} - U_{R2}$$

$$\text{Lagrangiano R3} \quad L_{R3} \doteq K_{R3} - U_{R3}$$

Si sobre m sólo actúan fuerzas conservativas entonces E_{R1} , E_{R2} y E_{R3} se conservan.

Del momento radial P_{R2} se obtiene la fuerza radial (F_{R2}) más sencilla para utilizar,

$$F_{R2} \doteq d(P_{R2})/dt = m d(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})/dt = m(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) = 2 \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{r} \doteq T$$

La magnitud radial $E' \doteq K' + U' \doteq [m(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{r})] + [-2 \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}]$ de una partícula se conserva si la partícula está sujeta sólo a fuerzas conservativas.

Dinámica Angular

La dinámica angular para una simple partícula m , está dada por:

$$\text{Momento A1} \quad \mathbf{P}_{A1} \doteq m [(\mathbf{r} \times \mathbf{v})/|\mathbf{r}|]$$

$$\text{Momento A2} \quad \mathbf{P}_{A2} \doteq m [(\mathbf{r} \times \mathbf{v})]$$

$$\text{Momento A3} \quad \mathbf{P}_{A3} \doteq m [(\mathbf{r} \times \mathbf{v})/(\mathbf{r})^2]$$

$$\text{Energía Cinética A1} \quad K_{A1} \doteq 1/2 m [(\mathbf{r} \times \mathbf{v})^2/(\mathbf{r})^2]$$

$$\text{Energía Cinética A2} \quad K_{A2} \doteq 1/2 m [(\mathbf{r} \times \mathbf{v})^2]$$

$$\text{Energía Cinética A3} \quad K_{A3} \doteq 1/2 m [(\mathbf{r} \times \mathbf{v})^2/(\mathbf{r})^4]$$

$$\text{Energía Potencial A1} \quad U_{A1} \doteq - [((\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}) (\mathbf{r})^2 - \int [2 \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}] d^{1/2}(\mathbf{r})^2)/(\mathbf{r})^2]$$

$$\text{Energía Potencial A2} \quad U_{A2} \doteq - [((\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}) (\mathbf{r})^2 - \int [2 \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}] d^{1/2}(\mathbf{r})^2)]$$

$$\text{Energía Potencial A3} \quad U_{A3} \doteq - [((\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}) (\mathbf{r})^2 - \int [2 \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}] d^{1/2}(\mathbf{r})^2)/(\mathbf{r})^4]$$

$$\text{Energía Mecánica A1} \quad E_{A1} \doteq K_{A1} + U_{A1}$$

$$\text{Energía Mecánica A2} \quad E_{A2} \doteq K_{A2} + U_{A2}$$

$$\text{Energía Mecánica A3} \quad E_{A3} \doteq K_{A3} + U_{A3}$$

$$\text{Lagrangiano A1} \quad L_{A1} \doteq K_{A1} - U_{A1}$$

$$\text{Lagrangiano A2} \quad L_{A2} \doteq K_{A2} - U_{A2}$$

$$\text{Lagrangiano A3} \quad L_{A3} \doteq K_{A3} - U_{A3}$$

Si sobre m sólo actúan fuerzas conservativas entonces E_{A1} , E_{A2} y E_{A3} se conservan.

Del momento angular \mathbf{P}_{A2} se obtiene la fuerza angular (\mathbf{F}_{A2}) más sencilla para utilizar,

$$\mathbf{F}_{A2} \doteq d(\mathbf{P}_{A2})/dt = m d(\mathbf{r} \times \mathbf{v})/dt = m (\mathbf{r} \times \mathbf{a}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \doteq \mathbf{M}$$

El momento angular \mathbf{P}_{A2} de un sistema aislado de partículas se conserva si las fuerzas internas del sistema obedecen la tercera ley de Newton en su forma fuerte ($\sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = 0$)

Relaciones

$$\text{Energía Cinética 1} \quad K_{L1} = K_{R1} + K_{A1}$$

$$\text{Energía Cinética 2} \quad K_{L2} = K_{R2} + K_{A2}$$

$$\text{Energía Cinética 3} \quad K_{L3} = K_{R3} + K_{A3}$$

$$\text{Energía Potencial 1} \quad U_{L1} = U_{R1} + U_{A1}$$

$$\text{Energía Potencial 2} \quad U_{L2} = U_{R2} + U_{A2}$$

$$\text{Energía Potencial 3} \quad U_{L3} = U_{R3} + U_{A3}$$

$$\text{Energía Mecánica 1} \quad E_{L1} = E_{R1} + E_{A1}$$

$$\text{Energía Mecánica 2} \quad E_{L2} = E_{R2} + E_{A2}$$

$$\text{Energía Mecánica 3} \quad E_{L3} = E_{R3} + E_{A3}$$

$$\text{Lagrangiano 1} \quad L_{L1} = L_{R1} + L_{A1}$$

$$\text{Lagrangiano 2} \quad L_{L2} = L_{R2} + L_{A2}$$

$$\text{Lagrangiano 3} \quad L_{L3} = L_{R3} + L_{A3}$$

Observaciones

Todas las ecuaciones de este trabajo pueden ser aplicadas en cualquier sistema de referencia inercial o no inercial sin necesidad de introducir las fuerzas ficticias sobre \mathbf{F} .

En este trabajo, las magnitudes ($m, \mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{a}, \mathbf{F}, \mathbf{P}, F, P, K, U, E$ y L) son invariantes bajo transformaciones entre sistemas de referencia inerciales y no inerciales.

Este trabajo no contradice la dinámica de Newton. De hecho, la ecuación $[\mathbf{F} = m \mathbf{a}]$ es un simple reformulación de la segunda ley de Newton.

Las integrales usadas en este trabajo son integrales indefinidas. Si ninguna fuerza actúa sobre la partícula entonces las integrales dan como resultado constantes.

Finalmente, las ecuaciones de este trabajo podrían modificarse de manera tal que no haya necesidad de trabajar con integrales indefinidas.

Anexo

Free-System

El free-system es un sistema de N partículas que está siempre libre de fuerzas externas e internas, que es tridimensional y que las distancias relativas entre las N partículas permanecen siempre constantes.

La posición \mathbf{R} , la velocidad \mathbf{V} y la aceleración \mathbf{A} del centro de masa del free-system respecto a un sistema de referencia S , la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ del free-system respecto al sistema de referencia S , están dadas por:

$$\mathbf{M} \doteq \sum_i^N m_i$$

$$\mathbf{R} \doteq \mathbf{M}^{-1} \sum_i^N m_i \vec{r}_i$$

$$\mathbf{V} \doteq \mathbf{M}^{-1} \sum_i^N m_i \vec{v}_i$$

$$\mathbf{A} \doteq \mathbf{M}^{-1} \sum_i^N m_i \vec{a}_i$$

$$\boldsymbol{\omega} \doteq \mathbf{I}^{-1} \cdot \mathbf{L}$$

$$\boldsymbol{\alpha} \doteq d(\boldsymbol{\omega})/dt$$

$$\mathbf{I} \doteq \sum_i^N m_i [|\vec{r}_i - \mathbf{R}|^2 \mathbf{1} - (\vec{r}_i - \mathbf{R}) \otimes (\vec{r}_i - \mathbf{R})]$$

$$\mathbf{L} \doteq \sum_i^N m_i (\vec{r}_i - \mathbf{R}) \times (\vec{v}_i - \mathbf{V})$$

donde \mathbf{M} es la masa del free-system, \mathbf{I} es el tensor de inercia del free-system (respecto a \mathbf{R}) y \mathbf{L} es el momento angular del free-system respecto al sistema de referencia S .

Transformaciones

$$(\vec{r} - \mathbf{R}) \doteq \mathbf{r} = \mathbf{r}'$$

$$(\vec{r}' - \mathbf{R}') \doteq \mathbf{r}' = \mathbf{r}$$

$$(\vec{v} - \mathbf{V}) - \boldsymbol{\omega} \times (\vec{r} - \mathbf{R}) \doteq \mathbf{v} = \mathbf{v}'$$

$$(\vec{v}' - \mathbf{V}') - \boldsymbol{\omega}' \times (\vec{r}' - \mathbf{R}') \doteq \mathbf{v}' = \mathbf{v}$$

$$(\vec{a} - \mathbf{A}) - 2 \boldsymbol{\omega} \times (\vec{v} - \mathbf{V}) + \boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times (\vec{r} - \mathbf{R})] - \boldsymbol{\alpha} \times (\vec{r} - \mathbf{R}) \doteq \mathbf{a} = \mathbf{a}'$$

$$(\vec{a}' - \mathbf{A}') - 2 \boldsymbol{\omega}' \times (\vec{v}' - \mathbf{V}') + \boldsymbol{\omega}' \times [\boldsymbol{\omega}' \times (\vec{r}' - \mathbf{R}')] - \boldsymbol{\alpha}' \times (\vec{r}' - \mathbf{R}') \doteq \mathbf{a}' = \mathbf{a}$$