Espaço-Tempo e a Métrica de Schwarzschild
(Space-Time and the Schwarzschild Metric)

Valdir Monteiro dos Santos Godoi
valdir.msgodoi@gmail.com

RESUMO – Explicamos informalmente o conceito de espaço-tempo, calculamos as variações de espaço e tempo em um campo gravitacional estático e com simetria esférica (solução de Schwarzschild) e, o mais importante, obtivemos a correspondente variabilidade da velocidade da luz neste campo. Pode ser grande a perda de velocidade da luz num campo gravitacional, o que pode explicar a matéria escura. Mais experiências sobre a velocidade da luz precisam ser feitas.

ABSTRACT – Informally we explain the concept of space-time, we calculate the changes in space and time in a static gravitational field and with spherical symmetry (Schwarzschild solution) and, the most importantly, we obtained the corresponding variability of the speed of light in this field. Can be great the loss of speed of light in a gravitational field, which may explain the dark matter. More experiences with the speed of light must be made.

Palavras chaves: espaço, tempo, espaço-tempo, réguas, relógios, massa, desvio para o vermelho, espectro, riscas espectrais, luz, Relatividade Geral, Einstein, unidade, conversão de unidades, velocidade da luz, gravidade, potencial gravitacional, aceleração da luz, métrica, Minkowski, Schwarzschild, efeito Cherenkov, matéria escura, Paul Ehrenfest, David Bohm, Mecânica Quântica.

Keywords: space, time, space-time, rulers, scales, clocks, mass, red shift, spectrum, spectral lines, light, General Relativity, Einstein, unit, unit conversion, speed of light, light velocity, gravity, gravitational potential, light acceleration, metric, Minkowski, Schwarzschild, Cherenkov effect, dark matter, Paul Ehrenfest, David Bohm, Quantum Mechanics.

§ 1

Se eu tivesse que explicar rapidamente o que é espaço-tempo, este conceito quase transcendental, surreal, diria que espaço-tempo é o espaço (*s*) e o tempo (*t*) da luz: $s = ct$, sendo *c* é a velocidade da luz. Estendendo-me mais um pouco, continuaria: em relação a um sistema de coordenadas, ou observador, que também podem estar em movimento.

A métrica do espaço-tempo da Relatividade Especial, dada por

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \tag{1}$$

ou métrica de Minkowski, para um observador fixo numa posição qualquer (x, y, z) resultaria em

$$ds^2 = c^2dt^2, \tag{2}$$

pois $dx^2 = dy^2 = dz^2 = 0$ neste caso de imobilidade.

Embora (x, y, z) sejam as coordenadas de algo que não precisa ser luz, um evento qualquer ou um hipotético observador neste ponto, a equação (2) descreve um movimento luminoso: $c\,dt$ é o diferencial da posição do movimento da luz, ds.

Se há algum outro movimento além do movimento da luz, i.e., $dx \neq 0$ ou $dy \neq 0$ ou $dz \neq 0$ ("ou" inclusivo), temos a forma geral (1).

Definindo o vetor posição $\vec{r} = (x, y, z)$, indicando nosso "algo" a mais além da luz, temos

$$dr^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \tag{3}$$

então (1) pode ser reescrita como

$$ds^2 = c^2dt^2 - dr^2, \tag{4}$$

ou equivalentemente

$$c^2dt^2 = ds^2 + dr^2. \tag{5}$$

Isso significa que o elemento de linha (*ds*), o elemento de deslocamento do vetor posição (*dr*) e o elemento de deslocamento da luz (*c dt*) formam um triângulo retângulo, no qual vale o teorema de Pitágoras.

Para quem não entende Cálculo Diferencial, nem as noções mais básicas de Mecânica, estas explicações continuam um grande mistério, mas caso contrário podem mostrar que o espaço-tempo, esta mescla de espaço e tempo, existe porque há uma segunda entidade na explicação do conceito, além do movimento de um corpo: o movimento da luz, cuja velocidade no vácuo é considerada constante, independentemente das velocidades da fonte luminosa e do referencial, também consideradas constantes (referenciais inerciais). Assim se introduz uma dependência entre posição e tempo, da luz e dos observadores (ou eventos): o espaço-tempo.

§ 2

Einstein nos ensina nos *Fundamentos da Relatividade Geral*[1] como se comportam as réguas e relógios num campo de gravidade estático. Seus resultados foram obtidos em primeira ordem de aproximação, e numa unidade de tempo na qual a velocidade da luz é igual a 1.

Para uma solução exata das equações de Einstein a métrica que utilizamos no lugar de (1) é a de Schwarzschild[2], válida para campos gravitacionais estáticos e esfericamente simétricos, como é esperado que ocorra no caso de sistemas planetários como o sistema solar,

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2}{c^2}\Phi\right)c^2dt^2 - \frac{dr^2}{1-\frac{2}{c^2}\Phi} - r^2(d\theta^2 + sen^2\theta\, d\varphi^2), \quad (6)$$

para $\Phi = \frac{GM}{r}$ o potencial gravitacional newtoniano em valor absoluto, *G* a constante gravitacional, *M* a massa do corpo que produziu o campo gravitacional, centrado na origem do sistema, $r = +\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ a distância do ponto (x, y, z) ao centro do sistema e *c* a velocidade da luz no vácuo. Esta expressão (6) é válida obviamente nas unidades convencionais de tempo e espaço, por exemplo, o sistema MKS, no qual $c \approx 3{,}0 \times 10^8$ m/s, mas igual a 1.

Se a velocidade da luz está numa unidade de tempo tal que valha 1, então (6) se transforma em

$$ds^2 = (1 - 2\Phi')dt^2 - \frac{dr^2}{1-2\Phi'} - r^2(d\theta^2 + sen^2\theta\, d\varphi^2), \quad (7)$$

para $\Phi' = \frac{G'M}{r}$ e $G' = \frac{G}{c^2}$, ou seja, o potencial gravitacional newtoniano Φ' (em valor absoluto) e a constante gravitacional *G*' na nova unidade de tempo, usando-se o valor habitual da velocidade da luz $c \approx 3{,}0 \times 10^8$ m/s, que neste caso serve como um fator de conversão de escala entre *G*' e *G*.

Vamos então usar em (7) raciocínio semelhante ao feito no § 22 de [1]:

Para uma régua unidade disposta imóvel no sentido radial, em relação ao centro do sistema, onde se localiza o centro de *M*, temos $dt = d\theta = d\varphi = 0, ds^2 = -1,$ e então

$$-1 = -\frac{dr^2}{1-2\Phi\prime}, \tag{8}$$

ou

$$dr = \sqrt{1-2\Phi'} \approx 1 - \Phi' = 1 - \frac{GM}{c^2 r}, \tag{9}$$

o que significa que nossa régua unidade teve um encurtamento, passando a medir $1 - \frac{GM}{c^2 r}$ sob a influência do campo gravitacional.

Nosso relógio unidade quando disposto neste campo, com $dr = d\theta = d\varphi = 0, ds^2 = 1,$ verifica

$$1 = (1 - 2\Phi')dt^2, \tag{10}$$

e assim (assumindo *dt* não negativo)

$$dt = \frac{1}{\sqrt{1-2\Phi\prime}} \approx 1 + \Phi' = 1 + \frac{GM}{c^2 r}, \tag{11}$$

tal qual o resultado obtido por Einstein, o que significa que nosso relógio passa a se comportar mais lentamente (período maior) sob a influência de um campo gravitacional.

As variações sofridas tanto pelo relógio quanto pela régua são geralmente muito pequenas, tornando-se imperceptíveis nos ambientes costumeiros do dia a dia. Como exemplo, para os dados da superfície da Terra

G = 6,674287 x 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}
M = 5,9722 x 10^{24} kg
c = 299 792 458 m/s
r = 6,371 x 10^6 m

temos

$$\Delta L = \frac{GM}{c^2 r} \approx 6{,}96 \times 10^{-10}, \tag{12}$$

onde ΔL indica a variação, para menos ou para mais, sofrida, respectivamente, pelo espaço (régua) e pelo tempo (relógio) unidades.

Pode causar estranheza um mesmo valor ser usado tanto para uma variação espacial quanto para uma variação temporal, pois sabemos que metros e segundos não são iguais, conforme nos ensinam desde as primeiras aulas de Física. ΔL, tal qual expresso em (12), é adimensional, sendo assim é um valor que para refletir corretamente a variação do espaço ou do tempo precisa ser multiplicado pela unidade que representa: unidade de espaço (1 m) ou de tempo (1 s).

Outra forma de entender o problema é lembrando que nos dois casos onde obtivemos ΔL havia um número 1, no primeiro membro das equações (8) e (11), que implicitamente carregava sua unidade dimensional correta (elevada ao quadrado).

§ 3

Utilizaremos a seguir a unidade convencional do tempo, 1 s, valendo *c* >> 1, e adotaremos todas as condições iniciais anteriores. A métrica a utilizar está em (6).

A régua apresentará a mesma variação de tamanho,

$$dr = \sqrt{1 - \frac{2}{c^2}\Phi} \approx 1 - \frac{\Phi}{c^2} = 1 - \frac{GM}{c^2 r}, \qquad (13)$$

como é fácil de ver, mas para calcularmos *dt* precisamos ter o cuidado de não utilizarmos mais $ds^2 = 1$, e sim $ds^2 = c^2 \cdot 1^2 = c^2$, e assim mais uma vez se introduz a luz onde só queríamos o tempo (e um relógio).

Então, para $d\tau$ o tempo próprio igual a 1 vem

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = c^2 = \left(1 - \frac{2}{c^2}\Phi\right) c^2 dt^2, \qquad (14)$$

donde

$$dt = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2}{c^2}\Phi}} \approx 1 + \frac{\Phi}{c^2} = 1 + \frac{GM}{c^2 r}, \qquad (15)$$

voltando assim ao conhecido resultado de Einstein, conforme (11).

Isso reforça nossa definição informal de espaço-tempo, dada no início. O tempo que quisermos calcular através da Relatividade deve, de alguma forma, estar relacionado com o movimento da luz: o que é $c\ d\tau$ (ou $c\ dt$) se não a distância percorrida pela luz no intervalo de tempo $d\tau$ (ou dt)?

As equações anteriores trazem consigo uma importante questão: o que uma massa é capaz de produzir no movimento da luz também influencia, na mesma medida, os relógios e réguas dispostos neste campo gravitacional?

Por exemplo, sabemos que a luz diminui de velocidade ao passar por dentro de um material (por exemplo, água ou sólido transparente), e é possível a partículas carregadas viajarem a velocidades superiores à da luz neste meio (efeito Cherenkov), mas isto não implica nada de diferente para a realidade que está fora da relação entre a luz e o material, ou seja, não precisou haver nenhuma dilatação do tempo, nem contração do espaço, para que a luz diminua sua velocidade, e outra partícula a supere. Ao sair do material ela readquire sua velocidade original, mas muitas vezes toma outra direção (refração).

Mas por que deve ser $ds^2 = c^2 d\tau^2$, e não $ds^2 = 1$ ou $ds^2 = \left(1 - \frac{2}{c^2}\Phi\right) c^2 d\tau^2$, no cálculo da variação temporal de um relógio em um campo gravitacional?

Primeiramente, como ds tem dimensão de espaço e ds^2 de espaço ao quadrado, a igualdade $ds^2 = 1 = 1^2$ só tem sentido físico se este 1 estiver numa unidade de espaço (metros, por exemplo), e não tempo (segundos). Isto só foi possível no estudo de Einstein em [1] porque ele se utilizou de uma unidade especial de tempo, na qual a velocidade da luz é igual a 1, e assim esta restrição tornou-se irrelevante, ou imperceptível (embora possa conduzir a outros erros).

Para que seja $ds^2 = \left(1 - \frac{2}{c^2}\Phi\right) c^2 d\tau^2$ deve estar implícito que o tempo próprio que temos, o tempo "real", livre, é na verdade o que é produzido sob o campo gravitacional Φ. Na realidade é isto mesmo o que ocorre conosco, pois as réguas e relógios terrestres são, em geral, os que estão sobre a superfície da Terra, ou razoavelmente próximos dela, ao menos nas condições normais do dia a dia.

Mantendo-se as variações radiais e angulares iguais a zero, i.e., $dr = d\theta = d\varphi = 0$, deve valer

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2}{c^2}\Phi_1\right) c^2 d\tau_1^2 = \left(1 - \frac{2}{c^2}\Phi_2\right) c^2 d\tau_2^2, \qquad (16)$$

donde

$$\frac{d\tau_1}{d\tau_2} = \sqrt{\frac{1 - \frac{2}{c^2}\Phi_2}{1 - \frac{2}{c^2}\Phi_1}} \approx 1 + \frac{GM}{c^2}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right), \qquad (17)$$

para $\Phi_1 = \frac{GM}{r_1}$ e $\Phi_2 = \frac{GM}{r_2}$ os potenciais gravitacionais em módulo nas distâncias r_1 e r_2, onde os tempos unidades passaram a $d\tau_1$ e $d\tau_2$, respectivamente.

A equação anterior indica que quanto maior for a diferença entre $\frac{1}{r_1}$ e $\frac{1}{r_2}$ maior será o quociente $\frac{d\tau_1}{d\tau_2}$, o que não nos causa surpresa.

A diferença $d\tau_1 - d\tau_2$ pode ser calculada através de

$$d\tau_1 - d\tau_2 = \left(\sqrt{\frac{1-\frac{2}{c^2}\Phi_2}{1-\frac{2}{c^2}\Phi_1}} - 1\right) d\tau_2 \approx \frac{GM}{c^2}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) d\tau_2. \quad (18)$$

Se $d\tau_2$ é nossa unidade de tempo, medida no relógio unidade à distância r_2 de *M*, então (17) e (18) levam a

$$d\tau_1 = \sqrt{\frac{1-\frac{2}{c^2}\Phi_2}{1-\frac{2}{c^2}\Phi_1}} \approx 1 + \frac{GM}{c^2}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right), \quad (19)$$

que deve então fornecer um valor mais exato do efeito de um campo gravitacional produzido no tempo à distância r_1 de *M*. r_2 deve ser nossa referência de distância para o tempo próprio, por exemplo, o raio da Terra naquele ponto (não necessariamente o raio médio, para efeitos de maior precisão, o que por outro lado invalidaria o uso “irrestrito” da métrica de Schwarzschild.

§ 4

Para o uso de $ds^2 = c^2 d\tau^2$ estamos levando em consideração que estamos na ausência de matéria, no vácuo, e sem campo gravitacional, e lá é onde medimos o tempo próprio τ.

Isso vem da Relatividade Restrita em combinação com a Relatividade Geral: a invariança do elemento de linha ds.

Na ausência de campo de gravidade deve valer a métrica de Minkowski, já descrita em (1):

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \quad (20)$$

substituindo t pelo tempo próprio τ.

Com um campo gravitacional atuando no “espaço-tempo” temos então a métrica de Schwarzschild (desconsiderando métricas mais complicadas, de diversos modelos cosmológicos),

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2}{c^2}\,\Phi\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1-\frac{2}{c^2}\Phi} - r^2(d\theta^2 + sen^2\theta\; d\varphi^2), \tag{21}$$

conforme (6).

Igualando ambos os ds^2 em (20) e (21), para $dx = dy = dz = 0$, $d\tau = 1$ e $dr = d\theta = d\varphi = 0$, chegamos a (15), conforme queríamos:

$$dt = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2}{c^2}\Phi}} \approx 1 + \frac{\Phi}{c^2} = 1 + \frac{GM}{c^2 r}. \tag{22}$$

§ 5

Finalizaremos calculando a velocidade da luz sob a influência do campo de gravidade.

Conforme vimos, sob este campo as réguas unidades $d\rho = 1$ passam a medir

$$dr = \sqrt{1 - \frac{2}{c^2}\,\Phi}\, d\rho \tag{23}$$

e os relógios unidades $d\tau = 1$ passam a ter o período dado por

$$dt = \frac{d\tau}{\sqrt{1-\frac{2}{c^2}\Phi}}. \tag{24}$$

Está implícito em (23) e (24) que estas equações valem também para os valores de $d\rho$ e $d\tau$ quaisquer, obedecendo a proporcionalidade destes valores, e não somente para os casos que são iguais à unidade.

Uma velocidade V_r genérica medida no sentido radial no campo gravitacional é então

$$V_r = \frac{dr}{dt} = \left(1 - \frac{2}{c^2}\,\Phi\right) \frac{d\rho}{d\tau}, \tag{25}$$

onde $\frac{d\rho}{d\tau}$ é a respectiva velocidade medida na ausência do campo.

Fazendo $\frac{d\rho}{d\tau} = c$ a velocidade da luz no vácuo, (25) fica igual a

$$c' = \left(1 - \frac{2}{c^2}\Phi\right)c = c - 2\frac{GM}{cr}, \tag{26}$$

ou seja, a velocidade c' da luz diminui quando a luz viaja radialmente sob a influência de um campo gravitacional, diminuição esta em relação à sua velocidade *c* sem campo de gravidade.

Além disso, o movimento da luz no sentido radial é acelerado, uma vez que sua velocidade varia com a distância ao centro e conseqüentemente em relação ao tempo também. A velocidade é máxima onde o campo é nulo, i.e., $r \to \infty$. Para que c' seja positivo devemos ter satisfeita a condição do raio de Schwarzschild, ou seja, $r > 2\frac{GM}{c^2}$, que é a região de validade da métrica (6), mas a equação (26) também revela situações onde é possível que a velocidade da luz atinja velocidades baixas, próxima de grandes massas. Ou seja, a luz pode atingir velocidades que são tipicamente de outras partículas, por definição, por exemplo, 90% da velocidade da luz, ou menos, e ela deveria perder assim sua propriedade luminosa (acreditamos). É mesmo muito possível que isto seja a chave para se explicar a matéria escura, um dos temas em aberto da Cosmologia, afinal, deve haver muitas combinações possíveis da razão $\frac{M}{r}$ em uma estrela para que a luz diminua consideravelmente sua velocidade e atinja padrões não luminosos. Neste caso concluímos que haverá também um determinado intervalo de velocidades onde a velocidade da luz corresponde ainda a um padrão luminoso, e fora destes limites se tornaria invisível, mesmo que com energia de movimento.

Surge assim uma importantíssima nova propriedade. A diferença

$$\Delta c = c - c' = +\frac{2GM}{cr} \tag{27}$$

já não é mais tão pequena quanto o valor de ΔL que calculamos em (12), $\Delta L \approx 6{,}96 \times 10^{-10}$, comprometendo seriamente o bem comportado conceito de velocidade da luz exata e absoluta,

$$c = 299\,792\,458\, m/s,$$

onde nem sequer são introduzidos números decimais neste valor.

Para os dados da superfície da Terra temos, com base em (27),

$$\Delta c^{Terra} \approx 4{,}17 \times 10^{-1}\, m/s,$$

mostrando-nos que pelo menos devido ao nosso próprio planeta seria possível utilizarmos ao menos uma vírgula decimal na representação de *c*, já que cerca de 0,4 m/s de diferença na velocidade da luz decorrem da força da gravidade da Terra.

Para os dados da superfície do Sol temos "enormes"

$$\Delta c^{Sol} \approx 1{,}27 \times 10^3\ m/s,$$

ou seja, 1270 m/s de diferença em *c* já nos fariam acreditar que não temos mais a luz, e sim outra partícula, talvez um neutrino ultra veloz, mas seria essencialmente a luz, segundo a Relatividade Geral.

Para o caso da Lua, onde sua massa e raio valem respectivamente

M_L = 7,349 x 10^{22} kg
R_L = 1,7374 x 10^6 m

temos

$$\Delta c^{Lua} = \frac{2GM_L}{cR_L} \approx 1{,}88 \times 10^{-2}\ m/s, \qquad (28)$$

ou seja, uma diferença de até cerca de 2 cm/s na velocidade da luz que teríamos ao enviar sinais de rádio à Lua é devida (conforme a Relatividade Geral) ao campo gravitacional da Lua, enquanto outros 41,7 cm/s são devidos ao campo gravitacional da Terra (valor limite na superfície da Terra, diminuindo ao se afastar da Terra).

Calculando uma estimativa da influência do Sol na velocidade da luz na superfície da Terra, para

M_S = 1,989 x 10^{30} kg
$D_{T\text{-}S}$ = 1,496 x 10^{11} m

temos

$$\Delta c^{Terra-Sol} = \frac{2GM_S}{cD_{T-S}} \approx 5{,}92\ m/s, \qquad (29)$$

ou seja, quase 6 m/s da velocidade da luz no vácuo e na ausência de campos gravitacionais são "perdidas" devido à influência do Sol, na superfície da Terra, o que é um resultado espantoso, e aparentemente desconhecido. Esta diferença também supera a própria influência do campo da Terra no valor da velocidade da luz em sua superfície (0,417 m/s), e este valor permanece praticamente inalterado se subtrairmos da distância Terra-Sol o raio da Terra.

Todos estes resultados anteriores mostram-nos ser da maior importância realizar novas verificações experimentais sobre a velocidade da luz no vácuo, no que melhor for conseguido obedecer à condição "livre de um campo de gravidade”. Não bastará admitir a validade da Relatividade Geral, pois o que precisamos saber é se ela é realmente válida (neste caso).

Como vimos, o Sol nos dá um potencial gravitacional maior que o da Terra, portanto, não basta apenas anularmos o campo da Terra; devemos anular também o campo do Sol, da Lua, e do que mais for necessário para termos a precisão desejada, e a confirmação da teoria.

A considerada tão precisa e absoluta velocidade da luz no vácuo,

$$c = 299\,792\,458\, m/s,$$

deverá sofrer correções, devido ao que propõe a Relatividade Geral, ou eventualmente alguma outra mais exata teoria da gravidade na qual a velocidade da luz também varie, talvez até mesmo a de Newton.

Se estes novos experimentos gravitacionais envolvendo a luz não indicarem resultados que confirmam a variabilidade da luz no campo gravitacional, conforme a Relatividade Geral, claro está que a Relatividade fracassou como teoria gravitacional, no que diz respeito ao espaço-tempo. O que mais ela nos forneceria de correto?

Vale lembrar que nossa equação (26) também foi obtida por Einstein em [3], equação (3), § 3, a menos do fator 2 e do sinal de Φ, que usamos em valor absoluto,

$$c = c_0\left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right), \tag{30}$$

e nos diz que o princípio da constância da velocidade da luz não é, pois, segundo esta teoria, válida na forma que usualmente se põe na base da teoria habitual da relatividade.

Lembremos também que foi em [3] que Einstein obteve para a deflexão da luz na passagem por um corpo celeste de massa *M* metade do valor que obteve posteriormente em [1]: 0,83’’, nos seus cálculos.

§ 6

Aprendemos e ao mesmo tempo tentamos explicar as sutilezas do espaço e tempo na Relatividade Geral, mas ela ainda é bem mais complicada que isso. O trabalho deve continuar, começando pelas Equações de Einstein. Fiz uma poesia aos 16 anos de idade, onde me dava a missão de resolvê-la:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = -kT_{ik}.$$

Uma vez que nem Einstein a resolveu, e provavelmente nem ninguém mais, e hoje já conheço vários problemas lógicos com a Relatividade, não vejo mais necessidade em resolvê-la, exceto pelo romantismo, pela emoção. É mesmo uma linda equação.

Mas a unificação das forças deve ser feita de outra maneira, não à maneira geométrica de Einstein, a qual se sabe que só tem trazido impossibilidades irreconciliáveis com o Modelo Padrão. Conforme se diz, ou a Mecânica Quântica está certa ou a Relatividade está certa ("ou" exclusivo). Eu fico com a Mecânica Quântica, embora concorde com a filosofia de Einstein sobre esta teoria: deve haver uma realidade maior por trás das leis estatísticas, e deve ser muito gratificante buscá-las. Seu amigo Paul Ehrenfest possivelmente entendeu estas leis mais fundamentais, assim como David Bohm.

REFERÊNCIAS

1. Einstein, A., *Os Fundamentos da Teoria da Relatividade Geral*, em Textos Fundamentais da Física Moderna, vol. I, O Princípio da Relatividade, tradução de Mário José Saraiva do artigo original *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie,* Annalen der Physik, **49**, 769-822 (1916). Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian (1983).

2. Lorenci, V. de, *Teoria da Gravitação*, em *Programa Mínimo de Cosmologia*, cap. 1, org. Mario Novello et al. Rio de Janeiro: Jauá Editora (2010).

3. Einstein, A., *Sobre a Influência da Gravidade na Propagação da Luz*, em Textos Fundamentais da Física Moderna, vol. I, O Princípio da Relatividade, trad. Annalen der Physik, **35** (1911). Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian (1983).