A precessão do periélio de Mercúrio explicada pela Mecânica Celeste de Laplace
(The precession of the perihelion of Mercury explained by Celestial Mechanics of Laplace)

Valdir Monteiro dos Santos Godoi
valdir.msgodoi@gmail.com

RESUMO – Calculamos neste artigo um valor teórico exato obtido classicamente para a precessão secular do periélio de Mercúrio, seguindo-se a teoria de Stockwell, baseada na teoria planetária de Laplace, sua *Mécanique Céleste*: encontramos 5600'',84 de arco por século para a velocidade angular da longitude do periélio de Mercúrio, $d\varpi/dt$, somando-se a precessão dos equinócios da Terra em relação ao início do ano de 1850, conforme cálculo de Stockwell.

ABSTRACT – We calculate in this article an exact theoretical value obtained classically for the secular precession of the perihelion of Mercury, followed by the theory of Stockwell, based on planetary theory of Laplace, your *Mécanique Céleste*: found 5600'',84 of arc per century for the angular velocity of the longitude of the perihelion of Mercury, $d\varpi/dt$, adding to the precession of the equinoxes of the Earth relative to the beginning of the year 1850, as calculated by Stockwell.

Palavras-chaves: precessão, periélio, Mercúrio, anomalia, explicação clássica, valor exato, valor teórico, valor observado, Le Verrier, Stockwell, Laplace, Newton, Weinberg, Relatividade Geral, teoria clássica, teoria newtoniana, mecânica clássica, mecânica celeste, *Mécanique Céleste*.

Keywords: precession, perihelion, Mercury, anomaly, classical explanation, exact value, theoretical value, observed value, Le Verrier, Stockwell, Laplace, Newton, Weinberg, General Relativity, classical theory, newtonian theory, classical mechanics, celestial mechanics, *Mécanique Céleste*.

A anomalia mais conhecida do movimento de Mercúrio é o avanço da precessão do seu periélio em relação à teoria clássica, descoberta por Le Verrier[1], anomalia que se diz explicada pela Relatividade Geral[2],[3]. Pretendemos neste artigo calcular esta precessão do periélio de Mercúrio seguindo a teoria newtoniana, a *Mécanique Céleste* de Laplace, e mostrar que o valor teórico assim obtido está em excelente acordo com o valor observado. Isto levará à conclusão de que a Relatividade Geral não explica a precessão do periélio de Mercúrio, ao contrário da teoria clássica. Primeiramente vamos calcular esta precessão baseando-nos nos dados de Stockwell[4].

John Nelson Stockwell (1832-1920) publicou em 1872 um excelente trabalho sobre as variações seculares dos elementos orbitais dos 8 planetas do sistema solar[4].

Dos 6 elementos orbitais estudados na Mecânica Celeste,

1) movimento médio (i.e., deslocamento angular médio no período considerado) (n)
2) distância média ao Sol (a)
3) excentricidade da órbita (e)
4) inclinação da órbita (ϕ)
5) longitude do periélio (ϖ)
6) longitude do nodo (θ)

os dois primeiros são considerados constantes, e os quatro últimos foram objetos de estudo de Stockwell em [4], a fim de determinar seus valores numéricos para cada planeta.

O recíproco das massas que Stockwell utilizou para chegar aos seus resultados (massas em relação à massa do Sol) estão descritos na tabela 1 a seguir, obtidos na página 5 de [4]. Os números entre parênteses na primeira coluna correspondem aos índices em algarismos romanos comumente usados nas equações do sistema planetário, e aqui transformados em números latinos.

Planeta	**$M_{planeta}$ (kg)**	**$M_{satélites}$(kg)**	**$m^{-1} = M_S / (M_p+M_s)$**	**Stockwell**	**μ**
Mercúrio (0)	$3,3022x10^{23}$	0	6 023 560,05	4 865 751	-0,1922
Vênus (1)	$4,8685x10^{24}$	0	408 565,27	390 000	-0,04544
Terra (2)	$5,9736x10^{24}$	$7,349x10^{22}$	328 935,07	368 689	0,1209
Marte (3)	$6,4174x10^{23}$	$1,26x10^{16}$	3 099 541,81	2 680 637	-0,1352
Júpiter (4)	$1,8986x10^{27}$	$3,9701x10^{23}$	1 047,48	1 047, 879	0,0003809
Saturno (5)	$5,6846x10^{26}$	$1,4051x10^{23}$	3 498,24	3 501,6	0,0009605
Urano (6)	$8,6810x10^{25}$	$9,1413x10^{21}$	22 910,85	24 905	0,08704
Netuno (7)	$1,0243x10^{26}$	$2,1489x10^{22}$	19 415,04	18 780	-0,03271

Tabela 1 – Massa dos planetas (M_p) e satélites (M_s) do sistema solar em kg e recíproco da soma em relação à massa do Sol ($M_S = 1,9891x10^{30}$ kg).

μ é o parâmetro de ajuste de massas, valendo

$$m_{corrigida} = m_{preliminar}(1 + \mu), \quad (1)$$

onde

$$m = \frac{M_{planeta}}{M_{Sol}}, \qquad (2)$$

ou seja, a massa do planeta em relação à massa do Sol.

Outros elementos invariáveis dos planetas, e também necessários para os cálculos dos elementos variáveis, estão na tabela 2 a seguir:

Planeta	Movimento médio em um ano juliano (n)	Distância média ao Sol (a) (U.A.)
Mercúrio (0)	5 381 016",200 0	0,387 098 7
Vênus (1)	2 106 641",438 0	0,723 332 3
Terra (2)	1 295 977",440 0	1,000 000 0
Marte (3)	689 050",902 3	1,523 687 8
Júpiter (4)	109 256",719 0	5,202 798 0
Saturno (5)	43 996",127 0	9,538 852 0
Urano (6)	15 424",509 4	19,183 581 0
Netuno (7)	7 873",993 0	30,033 860 0

Tabela 2 – Movimento médio em um ano juliano e distância média ao Sol dos planetas do sistema solar, segundo Stockwell.

Valores mais atuais dos elementos constantes na tabela 2 são dados nas tabelas 3 e 4 (obtidos da *Wikipedia*). O movimento médio foi obtido através da fórmula

$$n = \frac{365{,}25 \times 360 \times 60 \times 60}{P}, \qquad (3)$$

onde P é o período orbital em dias.

Planeta	Vel. orbital média (km/s)	Período orbital (d)	Movimento médio em um ano juliano (")
Mercúrio (0)	47,87	87,969 1	5 381 025, 837 5
Vênus (1)	35,02	224,701	2 106 639,489 8
Terra (2)	29,78	365,256 363 004	1 295 977, 422 8
Marte (3)	24,077	686,971	689 059, 654 6
Júpiter (4)	13,07	4 331,572	109 282,265 2
Saturno (5)	9,69	10 759,22	43 996,126 1
Urano (6)	6,81	30 799,095	15 402,418 8
Netuno (7)	5,43	60 190,030	7 864,491 8

Tabela 3 – Velocidade e período orbitais e movimento médio dos planetas do sistema solar, dados atuais.

Planeta	Periélio (U.A.)	Afélio (U.A.)	Distância média ao Sol (a) (U.A.)
Mercúrio (0)	0,307 499	0,466 697	0,387 098
Vênus (1)	0,718	0,728	0,723
Terra (2)	0,983 291 34	1,016 713 88	1,000 002 61
Marte (3)	1,381 497	1,665 861	1,523 679
Júpiter (4)	4,950 429	5,458 104	5,204 267
Saturno (5)	9,048 076 35	10,115 958 04	9,582 017 20
Urano (6)	18,375 518 63	20,083 305 26	19,229 411 95
Netuno (7)	29,766 070 95	30,441 252 06	30,103 661 51

Tabela 4 – Periélio, afélio e distância média ao Sol (semi-eixo maior) dos planetas do sistema solar, dados atuais.

Os valores usados por Stockwell para os elementos constantes e nossos respectivos valores atuais são aproximadamente iguais, mas nenhum deles é exatamente igual, nem mesmo a distância média da Terra ao Sol. Os movimentos médios da Terra e de Saturno usados por Stockwell, entretanto, estão com excelentes aproximações, o mesmo acontecendo com as distâncias médias ao Sol de Mercúrio, Vênus, Terra e Marte. No restante, as aproximações podem ser consideradas boas ou razoáveis.

Os valores da precessão do periélio de Mercúrio que se obtém devido à influência dos outros planetas, sem e com ajuste de massas, sem e com satélites, estão registrados na tabela 5 abaixo, arredondados para 2 dígitos decimais após a vírgula. Soma-se a cada um destes valores a precessão dos equinócios na Terra em relação à eclíptica aparente, cujo cálculo baseado em Stockwell (para o período 1850-1950) fornece $\Delta\psi_1 = 5024'',749831 \approx 5024'',75$. O cálculo atual do avanço do periélio em relação à teoria clássica usa como referência o valor de 5600'',73 [6].

Ajuste de massas	Massa dos satélites	Precessão ('')	Avanço do Periélio ('')
= 0	sem satélites	548,69	27,29
≠ 0	sem satélites	543,77	32,21
≠ 0	com satélites	544,93	31,05

Tabela 5 – Valores da precessão secular do periélio de Mercúrio baseado em Stockwell.

Os valores tabelados acima correspondem ao período de 100 anos de 1850 a 1950 (1º de janeiro), e nota-se que o avanço do periélio para os três casos é menor do que o valor aceito atualmente[6]: (43.11 ± 0,45)'', ou seja, os cálculos baseados em Stockwell aproximam-se mais dos valores observados que os atuais[6], e mesmo que os de Le Verrier[1] e Newcomb[7].

A longitude $\varpi^{(i)}$ do periélio de um planeta (i) do sistema solar, levando-se em consideração apenas a influência mútua entre os planetas, e segundo a

Mecânica Celeste de Laplace[5], é obtida através do arco-tangente da razão entre uma soma de senos ($h^{(i)}$) e uma soma de cossenos ($l^{(i)}$), tal que

$$\varpi^{(i)} = arctg\,\frac{h^{(i)}}{l^{(i)}}\,, \qquad (4)$$

onde

$$h^{(i)} = e^{(i)} sen\,\varpi^{(i)} \qquad (5)$$
$$l^{(i)} = e^{(i)} cos\,\varpi^{(i)} \qquad (6)$$
$$e^{2\,(i)} = h^{2\,(i)} + l^{2\,(i)} \qquad (7)$$

com o índice (0) referindo-se a Mercúrio, (1) a Vênus, (2) à Terra, etc., e $e^{(i)}$ é a excentricidade da órbita do planeta (i).

As soluções para os vários h e l devem satisfazer ao sistema de 16 equações diferenciais ordinárias lineares e de primeiro grau

$$\begin{cases} \frac{dh^{(i)}}{dt} = \left\{\sum_{k=0,k\neq i}^{7}(i,k)\right\} l^{(i)} - \sum_{k=0,k\neq i}^{7}[i,k]\; l^{(k)} \\ \frac{dl^{(i)}}{dt} = -\left\{\sum_{k=0,k\neq i}^{7}(i,k)\right\} h^{(i)} + \sum_{k=0,k\neq i}^{7}[i,k]\; h^{(k)} \end{cases} \qquad (8)$$

para i igual a 0 até 7, correspondendo aos 8 planetas do sistema solar (nada impede que somemos até 8, incluindo Plutão, pois este também orbita ao redor do Sol e era considerado planeta, mas sua contribuição seria ínfima, assim como as contribuições de outros corpos mais afastados).

Utilizamos acima a seguinte notação:

$$(i,k) = -\frac{3m^{(k)}n^{(i)}a^{2(i)}a^{(k)}(a^{(i)},a^{(k)})\prime}{4(a^{2(k)}-a^{2(i)})^2} = \qquad (9)$$
$$= -\frac{3m^{(k)}n^{(i)}\alpha^2 b_{-1/2}^{(1)}}{4(1-\alpha^2)^2},$$

onde m é a massa do planeta em relação à massa do Sol, n é o movimento médio, a a distância média ao Sol e

$$\alpha = \frac{a^{(i)}}{a^{(k)}}. \qquad (10)$$

(a, a'), $(a, a')'$, $(a, a')''$, etc. são os coeficientes do desenvolvimento em série de cossenos de

$$(a^2 - 2aa'cos\theta + a'^2)^{1/2} = (a,a') + (a,a')'cos\theta + (a,a')''cos2\theta + \cdots + (a,a')^{(n)}cosn\theta + \cdots \quad (11)$$

e

$$(a,a')' = a'b^{(1)}_{-1/2}, \quad (12)$$

$$b^{(1)}_{-1/2} = -\frac{1}{3} \cdot (1-\alpha^2)^2 \cdot 2\alpha \cdot \left\{\frac{3}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{3\cdot5}{2\cdot4} \cdot \alpha^2 + \right. \\ \left. + \frac{3\cdot5}{2\cdot4} \cdot \frac{3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6} \cdot \alpha^4 + \cdots\right\}. \quad (13)$$

Também utilizamos

$$[i,k] = -\frac{3m^{(k)}n^{(i)}\alpha\left\{(1+\alpha^2)b^{(1)}_{-1/2} + \frac{1}{2}\alpha b^{(0)}_{-1/2}\right\}}{2(1-\alpha^2)^2}, \quad (14)$$

com

$$b^{(0)}_{-1/2} = (1-\alpha^2)^2 \cdot 2 \cdot \{1 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \alpha^2 + \left(\frac{3\cdot5}{2\cdot4}\right)^2 \cdot \alpha^4 + \\ + \left(\frac{3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6}\right)^2 \cdot \alpha^6 + \cdots\}. \quad (15)$$

Os valores de $b^{(0)}_{-1/2}$ são positivos e os de $b^{(1)}_{-1/2}$ são negativos, o que é fácil de ver, enquanto (i, k) e [i, k] têm o mesmo sinal, igual ao sinal de $n^{(i)}$.

Como exemplo, Stockwell obtém os seguintes valores para os coeficientes das perturbações sofridas por Mercúrio:

$$\begin{aligned} (0,1) &= (1 + \mu') \cdot 2'',9986729 \\ (0,2) &= (1 + \mu'') \cdot 0'',8617070 \\ (0,3) &= (1 + \mu''') \cdot 0'',0279815 \\ (0,4) &= (1 + \mu^{IV}) \cdot 1'',6028375 \\ (0,5) &= (1 + \mu^{V}) \cdot 0'',0772642 \\ (0,6) &= (1 + \mu^{VI}) \cdot 0'',0013324 \\ (0,7) &= (1 + \mu^{VII}) \cdot 0'',0004603 \end{aligned} \quad (16)$$

e

$$\begin{aligned} [0,1] &= (1 + \mu') \cdot 1'',926868 \\ [0,2] &= (1 + \mu'') \cdot 0'',4087579 \end{aligned}$$

$$[0,3] = (1 + \mu''') \cdot 0'',008812816$$
$$[0,4] = (1 + \mu^{IV}) \cdot 0'',1489646 \qquad (17)$$
$$[0,5] = (1 + \mu^{V}) \cdot 0'',00391854$$
$$[0,6] = (1 + \mu^{VI}) \cdot 0'',0000336068$$
$$[0,7] = (1 + \mu^{VII}) \cdot 0'',00000741495.$$

A soma $\sum_{k=1}^{7}(0,k)$ é especialmente importante, pois representa a parte constante da velocidade angular do periélio de Mercúrio, relativa ao tempo t em anos julianos, sem levar em consideração a parte variável desta velocidade: as excentricidades dos planetas e os cossenos das diferenças $(\varpi^{(k)} - \varpi^{(0)})$. De modo geral temos (Méc. Cél., pg. 611, eq. [1126]):

$$\frac{d\varpi^{(i)}}{dt} = \sum_{k=0,k\neq i}^{7}(i,k) - \sum_{k=0,k\neq i}^{7}[i,k]\frac{e^{(k)}}{e^{(i)}}cos(\varpi^{(k)} - \varpi^{(i)}). \qquad (18)$$

No caso específico de Mercúrio, somando os valores dados em (16) e sem ajustes de massa obtemos

$$\sum_{k=1}^{7}(0,k) = 5'',5702558. \qquad (19)$$

Com os ajustes de massas da tabela 1 obtemos

$$\sum_{k=1}^{7}(0,k) = 5'',5351790. \qquad (20)$$

Vamos a seguir, como uma estimativa mais exata do valor de $\frac{d\varpi^{(0)}}{dt}$, calcular (18) para o ano de 1850, adotando como referência as excentricidades e os valores iniciais dos diversos $\varpi^{(k)}$ dados por Stockwell em suas tabelas (pgs. 187 a 195).

k	Planeta	[0, k] / (1+ μ)	μ	e	ϖ
0	Mercúrio	-x-	-0,1922	0,2056180	75º 07’ 00’’,0
1	Vênus	1’’,926868	-0,04544	0,0068420	129º 28’ 52’’,0
2	Terra	0’’,4087579	0,1209	0,0167712	100º 21’ 41’’,0
3	Marte	0’’,008812816	-0,1352	0,0931324	333º 17’ 47’’,8
4	Júpiter	0’’,1489646	0,0003809	0,0482388	11º 54’ 53’’,1
5	Saturno	0’’,00391854	0,0009605	0,0559956	90º 06’ 12’’,0
6	Urano	0’’,0000336068	0,08704	0,0462149	170º 34’ 17’’,7
7	Netuno	0’’,00000741495	-0,03271	0,0091739	50º 16’ 38’’,6

Tabela 6 – Valores para o cálculo de $\sum_{k=1}^{7}[0,k]\frac{e^{(k)}}{e^{(0)}}cos(\varpi^{(k)} - \varpi^{(0)})$.

Efetuando o cálculo da segunda somatória obtemos

$$\sum_{k=1}^{7}[0,k]\frac{e^{(k)}}{e^{(0)}}cos\left(\varpi^{(k)}-\varpi^{(0)}\right)=0'',085547. \tag{21}$$

Subtraindo (21) de (20) obtemos para (18), relativo a Mercúrio, o valor

$$\frac{d\varpi^{(0)}}{dt}(t=0)=5'',449632, \tag{22}$$

equivalente a 544’’,96 de arco por século, próximo ao obtido na tabela 5 (544’’,93), através de um valor médio de soluções do sistema (8).

Para um cálculo mais exato do valor acima, recalculando os coeficientes (0, k) e [0, k] usando os valores de m, n, a atuais, supostos constantes, encontrados nas tabelas 1, 3 e 4, respectivamente, obtemos os resultados a seguir, conforme tabela 7.

k	Planeta	α	$b_{-1/2}^{(0)}$	$-b_{-1/2}^{(1)}$	(0, k)	[0, k]
1	Vênus	0,535405	2,14610541	0,57451806	3,19697528	3,42334861
2	Terra	0,387097	2,07565165	0,40173925	1,02192663	0,79116803
3	Marte	0,254055	2,03240427	0,25817105	0,02479246	0,01259726
4	Júpiter	0,074381	2,00276722	0,07448380	1,60540264	0,23882212
5	Saturno	0,040398	2,00081610	0,04041487	0,07634219	0,00616819
6	Urano	0,020131	2,00020262	0,02013256	0,00143829	0,00005791
7	Netuno	0,012859	2,00008268	0,01285937	0,00044213	0,00001137

Tabela 7 – Valores de (0, k) e [0, k] para o cálculo de $\frac{d\varpi}{dt}$ relativo ao início de 1850.

Utilizando os coeficientes calculados acima e os parâmetros de excentricidades e longitudes do periélio dados na tabela 6, (20) é recalculado como

$$\sum_{k=1}^{7}(0,k)=5'',92731962 \tag{23}$$

e para (21) obtemos

$$\sum_{k=1}^{7}[0,k]\frac{e^{(k)}}{e^{(0)}}cos\left(\varpi^{(k)}-\varpi^{(0)}\right)=0'',15466066. \tag{24}$$

O resultado final para a velocidade angular do periélio de Mercúrio é então, conforme (18), a diferença entre (23) e (24), ou seja,

$$\frac{d\varpi^{(0)}}{dt}(t=0) = 5'', 77265895 \tag{25}$$

de arco por ano, ou cerca de 577'',27 de arco por século.

Somando (25) a 50'',23572 da precessão anual dos equinócios calculada para 1850, conforme Stockwell[4] (pg. 175), chegamos a 56'',00837895 de arco por ano, ou cerca de 5600'',84 de arco por século, em conformidade com o valor observado do movimento da precessão secular do periélio de Mercúrio, de acordo com Weinberg[6]: 5600'',73 ± 0'',41.

Dentro da precisão experimental, o valor teórico que obtivemos pela teoria de Stockwell, que é a teoria newtoniana, a mesma teoria de Laplace, está de acordo com o valor observado, então não é verdadeira a afirmação de que a teoria clássica, newtoniana, não é capaz de explicar o avanço da precessão secular do periélio dos planetas, e de Mercúrio em particular. Pelo contrário, a Gravitação de Newton a explica com surpreendente precisão.

Vejam que nossos cálculos se basearam no ano de 1850, pois é a referência de época utilizada por Stockwell. Muito provavelmente correções para os anos mais atuais de 1950, 2000, 2014, etc. chegarão a outro valor total para esta precessão, mas que deve continuar de acordo com o respectivo valor observado da época, seus valores não diferindo muito mais de 1'' por século. A precessão dos equinócios é a maior componente que entra no cálculo do valor total da precessão do periélio, portanto ela deve ser objeto de cuidadosa atenção.

Se por algum motivo nossos cálculos não fossem tão surpreendentemente coincidentes com o resultado observacional, já seriam capazes de mostrar o mais importante: a precessão do periélio que se obtém com a Relatividade Geral, igual a 43'',03 de arco por século[6], está completamente em desacordo com qualquer chamado avanço ou desvio desta precessão, pois este avanço (ou desvio, diferença) seria bem menor, por exemplo, o já obtido com os coeficientes de Stockwell, cerca de 31'',05 de arco por século (tabela 5). Não obstante, a diferença entre observação e teoria que aqui obtivemos é, essencialmente, nula: valor teórico = valor observado, dentro da precisão das medidas. Ou seja: a Relatividade Geral não explica a precessão do periélio de Mercúrio.

Encerramos esta comunicação esclarecendo que não reproduzimos exatamente os cálculos de Stockwell, mas nos baseamos nele. Nossos cálculos utilizaram inicialmente seus coeficientes e dados, inclusive utilizamos todos os coeficientes obtidos para a solução do sistema (8), dada por somas de senos e cossenos, mas utilizamos as nossas correções de massas, as massas dos planetas somadas às massas dos satélites, e os cálculos foram feitos através de programa de computador, em linguagem C, utilizando variáveis *double*. O movimento médio anual do periélio de Mercúrio calculado realmente por Stockwell é 5'',463803 (pg. xi, Introduction).

Foi em Laplace que encontramos (13) e (15) em séries infinitas, lembrando as conhecidas expansões em série das integrais elípticas, enquanto em Stockwell estes polinômios em α são convertidos em números decimais com até 7 dígitos significativos; $b_{-1/2}^{(0)}$ um polinômio de grau 30 e $b_{-1/2}^{(1)}$ um polinômio de grau 31 em α, indicando-se, evidentemente, que as duas séries são de fato infinitas.

Laplace nos diz que ambas as séries só convergem para $\alpha < 1$, caso contrário (e se $\alpha \neq 1$) devemos calcular (k, i) e [k, i], ao invés de (i, k) e [i,k], valendo as seguintes relações:

$$(i,k) = (k,i)\,\frac{m^{(k)}n^{(i)}a^{(i)}}{m^{(i)}n^{(k)}a^{(k)}} \tag{26}$$

e

$$[i,k] = [k,i]\,\frac{m^{(k)}n^{(i)}a^{(i)}}{m^{(i)}n^{(k)}a^{(k)}}. \tag{27}$$

Além disso, a importantíssima equação (18) também encontramos em Laplace apenas, não em Stockwell. O sistema (8) torna-se desnecessário quando o que pretendemos calcular é apenas o valor da variação temporal de ϖ, ao invés do exato valor de ϖ em algum tempo t.

Referências bibliográficas

1. Le Verrier, U. J., *Theorie du Mouvement de Mercure*, Annales de L'Observatoire Impérial de Paris, Recherches Astronomiques, tome V, chapitre XV (1859).

2. Einstein, A., *Os Fundamentos da Teoria da Relatividade Geral*. Textos Fundamentais da Física Moderna, vol. I, pp. 141-214. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian (1983). Traduzido de Ann. d. Phys. **49** (1916).

3. Einstein, A., *Explanation of the Perihelion Motion of Mercury from General Relativity Theory*, do original *"Erklarung der Perihelbewegung der Merkur aus der allgemeinen Relativitatstheorie"*, Sitzungsberichte der Koniglich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 831–839 (1915).

4. Stockwell, J.N., *Memoir on the Secular Variations of the Elements of the Orbits of the Eight Principal Planets*, Smithsonian Contributions to Knowledge, **232** (1872), em http://www.biodiversitylibrary.org/bibliography/31715#/summary

5. Laplace, P.S., *Mécanique Céleste*, vol. I, livro II, cap. VII, trad. Nathaniel Bowditch. Boston: Hilliard, Gray, Little and Wilkins Publishers (1829).

6. Weinberg, S., *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, pp.198-199. New York: John Wiley & Sons, Inc. (1972).

7. Newcomb, S., *Discussion of Observed Transits of Mercury, 1677 to 1881*, Astronomical Papers of the American Ephemeris and Nautical Almanac (1882), www.relativitycalculator.com/pdfs/mercury_perihelion_advance/S.Newcomb.pdf