Author name
Giuliano Bettini

Title

An interpretation of the laws of gravity and inertia

Abstract

Ideas on a source of inertia from fixed stars have crossed Physics least Mach onwards. Equations "Maxwell-like" for gravitation and inertia were obtained by several authors as a subspecies of the simplified theory of General Relativity. A precursor was Dennis Sciama.
Introducing a four-potential, I submit here a tentative interpretation of our laws about gravity and inertia, in complete analogy with electromagnetism.
In classical mechanics is not introduced, usually, a four potential.
The field produced by this four-potential describes both gravitational and inertial forces.
Admit the gauge transformation on potential is equivalent to enunciate the equivalence principle, and vice versa.
Inertial forces (ex. Coriolis force) are interpreted as a field action.
All the inertia is interpreted as a field action.
The physical presence of this field seems to be a fact, even more concrete the usual admission of inertial "fictitious forces".

Una interpretazione delle leggi della gravità e dell'inerzia

Introduzione

La comprensione delle leggi della gravità e dell'inerzia, o quantomeno la interpretazione delle nostre leggi sulla gravità e l'inerzia, comportano anzitutto l'abbandono di una posizione mentale inveterata la quale, come spesso accade in questi casi, nasconde una subdola ipotesi. Essa riguarda le accelerazioni. Di fronte alla espressione

(1) $$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = 2{,}5g(in\_direzione\_\hat{x})$$

io credo che la maggior parte di noi "senta"sul proprio corpo uno schiacciamento pari a 2,5 g, opposto al moto. Questo significa una ingiustificata identificazione a priori della cinematica con i campi di forze. Nella (1) difatti il primo membro contiene una grandezza cinematica, che fa parte cioè di tutte quelle grandezze, traiettoria, velocità etc, che descrivono il moto di un punto indipendentemente dalle cause che lo producono. Io ho maturato da tempo la convinzione che sia fondamentale operare una netta distinzione fra la cinematica da un lato e le forze di campo dall'altro, siano esse indifferentemente elettromagnetiche o gravitazionali (o gravitazionali/inerziali, ma uso il termine "gravitazionali" per semplicità comprendendovi tutto).
Possiamo immaginare i motivi di questa confusione, facendo le seguenti affermazioni tentativo, che tuttavia non incidono per niente sulla teoria che viene dopo e quindi possono essere lette o saltate, a piacere.
Diciamo che la confusione è nata dal fatto che, stante la presenza delle stelle fisse o dello spazio come massa dominante ovunque, ogni tipo di moto, quindi di situazione cinematica, non può prescindere anzi è direttamente connesso a una azione di campo. Non si può fare un esperimento, almeno per ora, in cui si prova a muoversi (una certa cinematica) togliendo di mezzo questo campo. Di qui è nata una pericolosa identificazione fra la cinematica (d**2x/dt**2) e le forze d'inerzia, come se d**2x/dt**2 fosse sinonimo di quella sensazione. In realtà il fatto è per così dire puramente casuale ed è dovuto alla presenza di quella massa dominante che crea il campo.
E' il campo che dà la sensazione, non la cinematica.
Ciò è evidente in elettromagnetismo dove:
a)- mi muovo, sento qualcosa, perché c'è una carica;
b)- tolgo la carica, <u>mi muovo come prima</u>, e non sento niente.
La sensazione non è data dalla cinematica, ma dal fatto che c'è il campo.
La distinzione fra cinematica e campi si porta dietro la mia convinzione, o se si vuole il mio dubbio, che le proprietà della gravitazione <u>non</u> vadano esaminate con regoli e orologi; o almeno, che non sempre convenga. La cinematica va esaminata con regoli e orologi; i campi vanno esaminati con particelle di prova. Questo pone su un piano di parità il campo elettromagnetico e quello gravitazionale, mentre riserva alla cinematica un suo ruolo comune in entrambe le discipline.
Per fare una affermazione meno impegnativa diciamo che, se salgo su una giostra, è più pratico esaminare i fenomeni gravitazionali e inerziali che lì avvengono tramite il concetto di campo e mediante particelle di prova, che non con una modificazione della geometria.
Chiusa la parentesi su questa decisa distinzione concettuale fra cinematica da un lato e campo dall' altro passo a descrivere una formula, di Hestenes, e come essa abbia destato su di me una fortissima impressione, questo soprattutto a causa di certe mie precedenti idee e convinzioni.

La struttura del campo

La formula in questione è [1]:

$$\dot{R} = \frac{\Omega}{2} R \tag{2}$$

Senza entrare in particolari che ora non ci interessano la (2) è, per dirla in termini semplificati, la “equazione del moto per un punto materiale”, espressa con i metodi e la simbologia della “Space Time Algebra” o algebra di Clifford che dir si voglia. Nella (2) R è una grandezza di tipo cinematico che descrive il moto; invece Omega è una grandezza di natura meccanica, in particolare un bivettore, vale a dire un ente strutturato matematicamente con una parte “tipo vettore campo elettrico” e una parte “tipo vettore campo magnetico”, il cui compito nella formula è in definitiva quello di specificare le forze esterne. Assegnato Omega, si trova R “integrando le equazioni del moto”. La (2) separa la cinematica dai campi di forze.
Hestenes nel corso del tempo ha denominato Omega in vario modo: “proper angular velocity”, “generalized rotational velocity”, etc: Tuttavia io invece ho colto un messaggio diverso in Omega:

“le forze esterne si possono assegnare con un bivettore”.

C’è di più. Nel caso di una particella di carica q e massa m soggetta ad un campo elettromagnetico F (F in questo caso è il “bivettore del campo elettromagnetico”, formato da E ed H) la dinamica della particella è specificata da [2]:

$$\Omega = \frac{q}{m} F \tag{3}$$

Con qualche passaggio matematico la (2) e la (3) forniscono la legge del moto espressa con la forza di Lorentz, legge con la quale il parametro cinematico “accelerazione” viene eguagliato alla azione esterna di campo.
Hestenes è rimasto abbastanza colpito da questa semplice relazione (3) la quale in sostanza dice, a parte fatti dimensionali, che in questo caso Omega è “identico” a F, coincide con il campo elettromagnetico F. Poiché Omega coincide con F, e F si può ricavare da un potenziale scalare e un potenziale vettore, anche Omega “identico” lo sarà.
Dice Hestenes [1]: “This role of the electromagnetic field F as a rotational velocity is so simple and natural that it deserves a name. I propose to dub the relation Omega=(q/m)F the *Lorentz Torque*”.
Io invece ho colto un messaggio diverso:
“le forze esterne agiscono <u>in questo caso</u> tramite un campo bivettoriale che deriva da un potenziale scalare e un potenziale vettore, un quadrivettore, con le formule tipiche dell’elettromagnetismo”.
Su questo fatto non c’è alcun dubbio perché Omega coincide con F, e F si può ricavare da un potenziale scalare e un potenziale vettore. Tuttavia io, polarizzato da mie idee precedenti, ho formulato la seguente congettura:
“le forze esterne agiscono <u>sempre</u> (vale a dire anche nel caso della gravitazione) tramite un campo bivettoriale che deriva da un potenziale scalare e un potenziale vettore, con le formule tipiche dell’elettromagnetismo”.
Con questa ipotesi di lavoro in testa ho ripreso vecchie idee focalizzando però l’attenzione non tanto sui campi <u>quanto su questo ipotetico potenziale</u>.

Il necessario legame con la meccanica classica

Le idee su una origine dell'inerzia da parte delle stelle fisse hanno attraversato la Fisica almeno da Mach in poi. Equazioni "Maxwell-like" per la gravitazione e l'inerzia sono state ricavate da vari autori come subspecie semplificata della teoria della Relatività Generale [3]. Un precursore è stato Dennis Sciama [4]. Per qualche motivo a me sconosciuto di queste cose si parla poco, mentre invece addirittura leggo su Internet che c'è chi vorrebbe fossero insegnate a scuola. Probabilmente si tratta di teorie su cui non tutti sono d'accordo.
Mi hanno colpito però due aspetti:
1. per chi pone (non tutti) l'origine dell'inerzia nelle stelle lontane pare resti aperta la questione del perché l'inerzia si avverta senza ritardi. Difatti con un potenziale vettore irradiato dalle stelle fisse l'azione si avvertirebbe con molto ritardo, quello dei potenziali ritardati, diciamo 14 miliardi di anni…..Come si spiega il fatto che invece le forze d'inerzia si avvertono subito?
2. per quale motivo per dedurre le equazioni dovrebbe essere necessario ricorrere alla Relatività Generale? Per campi gravitazionali deboli dovrebbe essere sufficiente ragionare in termini di meccanica classica o al più di meccanica relativistica.
Secondo me tutte le questioni devono avere una risposta nell'ambito ristretto della meccanica classica, e del calcolo vettoriale 3D. Difatti, se c'è come c'è una analogia delle formule con quelle dell'elettromagnetismo, e siccome l'inerzia viene avvertita a velocità comunque basse e per campi gravitazionali deboli, e poiché l'elettromagnetismo può venire esposto anche senza ricorrere alla teoria della relatività, ne segue che la matematica dell'ordinario calcolo vettoriale deve essere sufficiente, e la meccanica classica deve già contenere tutti gli ingredienti e le spiegazioni necessarie.
In altre parole la individuazione del potenziale del campo, potenziale scalare più potenziale vettore, deve essere possibile nell'ambito della meccanica classica.
Mi sono ripromesso pertanto di prendere in esame la meccanica classica (non relativistica) allo scopo di vedere se sia possibile riformularla come l'elettromagnetismo; e mi sono riproposto, così come si fa nei corsi di base di elettromagnetismo, di non fare ricorso a metodi di calcolo più o meno sofisticati ma all'ordinario calcolo vettoriale; la qual cosa farò nei prossimi paragrafi con il rischio di non essere a tratti rigoroso, ma senz'altro col vantaggio di una migliore comprensione fisica dei fenomeni.

Le forze

In qualunque buon libro di meccanica classica, es.Sommerfeld [5], “Mechanics”, si tende ad essere molto puntigliosi nel precisare le definizioni. Sommerfeld distingue le forze in “vere” e “apparenti”, collocando fra queste ultime le forze d’inerzia. Dice Sommerfeld:”all bodies have the tendency to remain in a state of rest or of uniform rectilinear motion. We can think of this tendency as a resistance to changes in the motion (…) or, for brevity, as an *inertial force.* The definition is therefore….”:

(4) $$\vec{F}_{app} = -m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Più avanti Sommerfeld colloca anche la forza centrifuga fra queste. Sebbene nella (4) compaia con il simbolo “v” la velocità della massa m, possiamo notare che la forza apparente (4) si esercita su tutti i punti dello spazio in esame, come si constata salendo in automobile e accelerando, per cui è più conveniente indicare con “V”.la velocità dei punti dello spazio in esame e scrivere:

(5) $$\vec{F}_{app} = -m\frac{d\vec{V}}{dt}$$

Di più V, e la conseguente accelerazione, può essere differenziata fra i vari punti dello spazio in esame, come mostra l’esempio della forza centrifuga e come si constata salendo su una giostra. Dice sempre Sommerfeld: ”It, too, is a fictitious force. It corresponds to (…) *centripetal* acceleration, i.e., directed toward the center of curvature”.
Accanto a queste forze vi sono le forze “vere” cioè, se escludiamo l’urto o la spinta, le forze che derivano da una “physical situation” come la gravitazione, la cui espressione è:

(6) $$\vec{F}_{vera} = -mgrad\varphi$$

Riassumendo la forza totale in presenza di forze gravitazionali più inerziali è:

(7) $$\vec{F}_{tot} = \vec{F}_{vera} + \vec{F}_{app}$$

ovverosia raggruppando la (5) e la (6):

(8) $$\frac{\vec{F}_{tot}}{m} = -grad\varphi - \frac{d\vec{V}}{dt}$$

Possiamo ora fare la seguente considerazione. Quest'ultima espressione è visibilmente simile alla espressione della forza esercitata su una carica q, riferita alla carica (campo elettrico E) scritta in funzione del potenziale:

(9) $$\vec{E} = -grad\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial ct}$$

e appare ancor più visibilmente come una forza di campo, derivante da un potenziale scalare+vettore se scritta, invece di (8), nella forma:

(10) $$\vec{g} = -grad\varphi - \frac{\partial \vec{U}}{\partial ct}$$

Riassumiamo:
la meccanica, vedi Sommerfeld, ci insegna che per un punto di massa m fermo in un riferimento S' (n.b.: possiamo pensare a noi stessi sul sedile dell'auto con assi del riferimento solidali all'auto) la accelerazione totale "g" o forza totale riferita alla massa, percepita, è in generale la somma delle forze di gravità, o "forze vere", e di forze d'inerzia, date dalla accelerazione che il riferimento S' ha rispetto ad un riferimento inerziale S (forze apparenti). La formula (10) scritta così ci consente di agganciarci alla analoga formula (9) dell'elettromagnetismo, con un potenziale scalare più vettore che fa la sua comparsa esplicita nella forma "elettromagnetica":

(11) $$U = (\varphi, \vec{U})$$

con $\vec{U} = \vec{V}c$ e quindi:
:

(12) $$U = (\varphi, \vec{U}) = \left(\varphi, \vec{V}c\right)$$

essendo "V" la velocità dei punti del riferimento S' rispetto allo spazio inerziale.
Resta da vedere se questa circostanza sia soltanto un puro caso o se invece abbia un riscontro fisico.

Il quadripotenziale

In meccanica non si introduce, usualmente, un quadripotenziale.
In altre parole in meccanica il potenziale gravitazionale φ e la velocità V dei punti di S' rispetto allo spazio inerziale non vengono in alcun modo collegati fra loro e nemmeno riconosciuti come facenti parte di un unico ente quadrivettore.
La meccanica fa tuttavia una affermazione che collega fra loro le forze ovvero le accelerazioni, quando dice che si può scambiare una forza vera (–gradφ) con un pari ammontare di forza apparente (-dV/dt) ("equivalenza fra forze gravitazionali e forze inerziali"). Il principio di equivalenza espresso in termini di forze passa dapprima attraverso la relazione meccanica (7), che poi si completa nello scrivere che posso aggiungere e togliere una forza:

(13) $$\vec{F}_{tot} = (\vec{F}_{vera} + \vec{f}\,) + (\vec{F}_{app} - \vec{f}\,)$$

Ora è interessante, e probabilmente indizio di un legame fra i potenziali scalare e vettore, notare che:

il principio di equivalenza si traduce in una trasformazione di gauge sui potenziali:

(14) $$\vec{U} \rightarrow \vec{U} + grad\chi \qquad \varphi \rightarrow \varphi - \frac{\partial \chi}{\partial ct}$$

Difatti basta definire una "csi" opportuna e, con qualche calcolo, si constata che si può far sparire completamente nella (10) il campo gravitazionale che viene sostituito da un'equivalente azione inerziale; oppure si può far scomparire inerzia e comparire un campo gravitazionale di pari entità,il tutto a proprio piacimento, usando le usuali formule (14) di una trasformazione di gauge.
Per fare un esempio concreto rimando all'Appendice 1 dopo che avremo stabilito la successiva formula finale (19) del potenziale.
Possiamo quindi affermare che

ammettere la trasformazione di gauge (14) sul potenziale (11) equivale a enunciare il principio di equivalenza, e viceversa!!

Ciò è sospetto; ma tutto questo potrebbe ancora apparire come un artifizio matematico con il ricorso ad una funzione ausiliaria "potenziale" U scalare+vettore.. Un passo in più sarebbe fornito dalla individuazione di un significato che assegnasse al quadripotenziale il rango di grandezza fisica: un vero e proprio "campo" di qualchecosa. (nota: dimensionalmente U è Energia riferita alla massa).
A questo scopo facciamo una brevissima digressione che riguarda la formulazione relativistica dell'elettromagnetismo.
Esso ci dice che il potenziale A analogo di U, se si vuole la invarianza relativistica delle equazioni, deve necessariamente essere un quadrivettore.
Nella espressione (11) di U compare un vettore velocità 3D V.
L'unico quadrivettore che si possa formare con una velocità 3D V è la quadrivelocità, o un quadrivettore ad essa proporzionale. Quindi U non può che essere la quadrivelocità dei punti dello spazio S' o un quadrivettore ad essa proporzionale. Mettiamoci in uno spazio privo di masse vicine

(diciamo nello spazio vuoto) e sia V la velocità 3D dei punti del nostro spazio di riferimento rispetto a un riferimento inerziale. Il quadrivettore velocità formabile con V è la quadrivelocità pari a (circa, per basse velocità):

(15) $$(1, \frac{\vec{V}}{c})$$

e di conseguenza U, come in elettromagnetismo, deve essere proporzionale a tale quadrivettore. La costante di proporzionalità è facile da trovare. Per ottemperare la (12) di U deve obbligatoriamente risultare:

(16) $$U = c^2 (1, \frac{\vec{V}}{c}) = (c^2, \vec{V}c)$$

A prescindere dai significati più o meno fantasmagorici su chi determini la presenza di un potenziale scalare c**2 nella (16) ciò che emerge è che, per sole esigenze di invarianza relativistica e affinché valgano le ordinarie leggi della meccanica (10), il quadripotenziale deve avere quella forma.
In particolare il potenziale scalare vale c**2, da cui segue che la energia potenziale di una massa m, in un riferimento S' in cui essa è ferma rispetto allo spazio inerziale (V=0) e in assenza di altre masse nei pressi, vale mc**2. Questo risultato, pur se nato in modo non voluto, appare coerente con ciò che la fisica afferma per altra via.
Il potenziale (16) non è in grado di determinare nello spazio vuoto di masse nessuna forza di attrazione gravitazionale in base alla (10) perché c**2 è costante.
Se è presente a distanza "r" una massa M che determina un potenziale scalare che sappiamo essere:

(17) $$\Phi = -\frac{kM}{r}$$

e se ragionevolmente ammettiamo che i potenziali siano additivi come in elettromagnetismo, segue che si deve aggiungere a (16) il quadripotenziale:

(18) $$U_M = \Phi(1, \frac{\vec{V}}{c})$$

Il secondo termine fornisce un contributo al potenziale vettore (quindi all'inerzia) assolutamente infimo, anche se filosoficamente avrebbe un significato importante vale a dire una modifica dell'inerzia nei pressi delle masse. Per le attuali considerazioni che sono praticamente di meccanica razionale possiamo senz'altro trascurarlo, mentre è senz'altro da aggiungere al potenziale scalare c**2 in (16) il potenziale gravitazionale delle masse presenti, la (17).
Il quadripotenziale complessivo che tiene conto di gravità e inerzia è pertanto per ogni uso pratico:

(19) $$U = (c^2 + \Phi, \vec{V}c)$$

essendo quindi dato dalla (11), con il potenziale vettore (12) e con il potenziale scalare:

(20) $$\varphi = c^2 + \Phi$$

Con ciò è terminato il calcolo del potenziale.
Il potenziale genera un campo agente (10), analogo al campo elettrico E, che raggruppa gravità e inerzia. Questo campo ci attendiamo che appaia nella equazione del moto di una massa m espressa con la formula della forza di Lorentz, fornendo la parte di forza che non dipende dalla velocità v della massa m (da non confondere con V).
In analogia con l'elettromagnetismo a causa della presenza del quadripotenziale U esiste anche un campo analogo al campo magnetico H generato da:

(21) $$\vec{\Omega} = rot\vec{U}$$

Questo campo è atteso che appaia nella forza di Lorentz alla stregua del campo H, dando una forza dipendente dalla velocità v della massa m. In effetti si constata che questo campo esiste realmente, come si può vedere dal caso del riferimento rotante.

Il campo di rotazione

Applichiamo le formule al caso di un riferimento S’ rotante in senso antiorario rispetto allo spazio inerziale.
Seguendo le “istruzioni per l’uso” e in assenza di forze dovute alle masse dobbiamo calcolare il quadripotenziale. Il calcolo si riduce in questo caso a calcolare la (12) essendo “V” il campo di velocità dei punti di S’ rispetto a un riferimento inerziale S. Prendiamo una comune origine O, un comune asse z e l’asse delle x di S’ coincidente con l’asse delle x di S per t=o. Sia P un punto di S’ di coordinate (r,phi) in S’. Sia omega la velocità angolare di S’ attorno all’asse z. La velocità V del peraltro generico punto P di S’ vale:

(22) $$\vec{V} = \hat{i}\exp(i\varphi) i\varpi r \exp(i\varpi t)$$

Questo determina completamente il quadripotenziale U.
A sua volta U determina univocamente il campo (forza riferita alla massa) che è presente nello spazio di S’. Calcoliamo questo campo seguendo le istruzioni per l’uso. Dalla (10) si ha in S’ un campo “tipo E” che vale:

(23) $$\vec{g} = -\frac{\partial \vec{V}c}{\partial ct} = \hat{i}\exp(i\varphi)\varpi^2 r \exp(i\varpi t)$$

Nella formula compare il versore dell’asse delle x di S’:

(24) $$\hat{i}' = \hat{i}\exp(i\varpi t)$$

per cui il campo in S’ vale:

(25) $$\vec{g} = \hat{i}'\exp(i\varphi)\varpi^2 r$$

Poiché (r,phi) sono le coordinate di P in S’ si può introdurre esplicitamente il versore:

(26) $$\hat{r} = \hat{i}'\exp(i\varphi)$$

diretto “outward” da O verso P. Complessivamente dunque in S’ si ha il campo di forze:

(27) $$\vec{g} = \varpi^2 r\hat{r}$$

Sempre seguendo le istruzioni per l’uso è presente un ulteriore campo “tipo H” dato dalle (21), (12) e (22). Conviene eseguire il calcolo nelle coordinate cilindriche di S’. Esprimiamo dapprima V in S’. Dalla (22) con (24) e (26) si ha:

(28) $$\vec{V} = i\hat{r}\varpi r$$

da cui avendo V la sola componente secondo phi si ottiene:

(29) $$\vec{\Omega} = rot\vec{V}c = \frac{1}{r}\frac{\partial rV_{phi}}{\partial r}c\hat{z} = 2\varpi c\hat{z}$$

e in definitiva, con orientamento secondo l’asse z:

(30) $$\vec{\Omega} = 2\vec{\varpi}c$$

Riassumendo: siamo infine pervenuti pur se su un esempio a calcolare un campo analogo a E, il campo (27) che esprime le azioni gravitazionali e inerziali, e in più compare anche un vettore tipo H che visibilmente dalla (30) è collegato alle rotazioni rispetto allo spazio inerziale.
Dato il campo, la forza proseguendo nell’analogia dovrebbe essere calcolabile come forza di Lorentz.
Sulla base di quanto precedentemente esposto dovremmo quindi verificare se valga la legge del moto per una massa m espressa con la formula della forza di Lorentz:

(31) $$m\frac{d\vec{v}}{dt} = m(\vec{g} + \frac{1}{c}\vec{v}\times\vec{\Omega})$$

Sostituendovi (27) e (30) s’arriva alla legge del moto:

(32) $$m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\varpi^2 r\hat{r} + m2\hat{v}\times\vec{\varpi}$$

Il secondo termine a destra è la forza di Coriolis (e la forza di Coriolis entra a far parte delle forze d’inerzia [5]).
Quindi la (32) è esattamente la usuale legge del moto in un riferimento rotante scritta in tutti i libri di meccanica, calcolata però qui per tutt’altra via e con un approccio filosofico completamente diverso.
Si potrebbe obbiettare che <u>quella</u> esposizione è concreta, mentre questa è di natura fittizia. Paradossalmente vale esattamente il contrario.
Immaginiamo un fisico scettico che dica: ”Questa teoria di <u>campi</u> “tipo E” e “tipo H” è interessante ma è astratta, tendenziosa, è una esposizione matematica alternativa. *Ora vado su un riferimento rotante e misuro*”.

Orbene è facile rendersi conto che organizzando misure di campo con i metodi standard, con una particella di prova, si rivelerebbero esattamente ed esclusivamente la (31) e i campi (27) e (30). Questi sono i fatti sperimentali. Paradossalmente quindi ogni altra affermazione che affermi qualcosa di diverso è una *ipotesi*; e come diceva Newton (Newton,"Principia"):
"Non ho ancora potuto dedurre dai fenomeni la ragione di tali proprietà della gravità, e non immagino alcuna ipotesi.Perché tutto ciò che non può essere dedotto dai fenomeni è un'ipotesi: e le ipotesi, siano esse metafisiche, fisiche, meccaniche o di qualità occulte, non devono essere accettate dalla filosofia sperimentale".
Con ciò termina questa breve esposizione della teoria del potenziale. Data la stretta analogia formale con l'elettromagnetismo è possibile indagare ulteriormente facendo riferimento alle formule che si trovano già pronte sui libri di elettromagnetismo. Naturalmente "cum grano salis" vale a dire verificando se ci sia una ragione fisica per assumerle e non soltanto perché sono scritte lì. A questo scopo ho scelto appositamente un sistema di unità di misura, nella definizione dei campi, che li rendesse equidimensionali. Le dimensioni sono quelle di una accelerazione. Le formule elettromagnetiche di riferimento sono quelle scritte nel sistema di unità di misura di Gauss, nel quale E ed H sono appunto equidimensionali. La identità delle formule fondamentali (9) e (10), così come della (21) con la corrispondente elettromagnetica, rende possibile la traduzione diretta delle formule.
Così si può scrivere subito per copiatura, ma si può anche ricavare, la prima coppia di equazioni di Maxwell:

(33) $$rot\vec{g} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{\Omega}}{\partial t} \qquad div\vec{\Omega} = 0$$

E così via.
Quindi questo è un modo per esaminare relazioni mutuandole dall'elettromagnetismo per decidere poi se abbiano un significato accettabile e quale.

Appendice 1: trasformazione di gauge

Facciamo un esempio di trasformazione di gauge sul potenziale partendo dalla sua forma definitiva (19). Riporto per comodità le formule di interesse.

Il potenziale:

(19) $$U = (c^2 + \Phi, \vec{V}c)$$

(20) $$\varphi = c^2 + \Phi$$

(12) $$\vec{U} = \vec{V}c$$

La trasformazione di gauge:

(14) $$\vec{U} \rightarrow \vec{U} + grad\chi \qquad \varphi \rightarrow \varphi - \frac{\partial\chi}{\partial ct}$$

Il campo:

(10) $$\vec{g} = -grad\varphi - \frac{\partial\vec{U}}{\partial ct}$$

(21) $$\vec{\Omega} = rot\vec{U}$$

Anzitutto rammentiamo, come è immediato verificare, che la trasformazione di gauge lascia completamente inalterati i campi. Si abbia ora un campo di gravitazione dovuto a una massa M. Poniamo la massa M al centro del riferimento S'. I punti del riferimento sono fissi rispetto allo spazio inerziale. Potenziale:

(34) $$\varphi = c^2 - \frac{kM}{r} \qquad \vec{U} = 0$$

Scegliamo “csi” così fatta:

(35) $$\chi = -\frac{kMct}{r}$$

Applicando la trasformazione di gauge (14) il potenziale (34) si muta in:

(35) $$\varphi = c^2 \qquad \vec{U} = (\frac{kM}{r^2})t\hat{r}c$$

I campi sono immutati. L'esame del potenziale trasformato (35) ci descrive cosa è fisicamente successo.

Siamo ora in un riferimento S’ equivalente rispetto ai campi. Il riferimento è nello spazio vuoto. Non agiscono più campi gravitazionali. In ogni punto del riferimento lo spazio accelera verso l’esterno con una accelerazione pari a :

(36) $$\vec{a} = \frac{kM}{r^2}\hat{r}$$

Un osservatore non è in grado di dire se si trova nell’uno o nell’altro riferimento, a meno che non abbia altri elementi per decidere oltre ai campi. Si comprende quindi che il senso fisico della trasformazione di gauge è quello di fornire tutti i riferimenti matematicamente equivalenti rispetto alla gravitazione. Se si tratta di riferimenti fisicamente plausibili, l’osservatore può trovarsi in uno di questi riferimenti senza avere gli elementi per decidere, su basi esclusivamente gravitazionali, quale sia realmente il suo “tipo di spazio”.

Appendice 2: considerazioni fisiche

Abbiamo così visto che veramente è possibile sostenere che:
"le forze esterne agiscono sempre (vale a dire anche nel caso della gravitazione) tramite un campo bivettoriale che deriva da un potenziale scalare e un potenziale vettore, con le formule tipiche dell'elettromagnetismo".
Dissi che era mio intendimento focalizzare l'attenzione non tanto sui campi quanto su questo ipotetico potenziale.
Questo è solo un artifizio matematico?
Dissi che un passo in più sarebbe fornito dalla individuazione di un significato che assegnasse al quadripotenziale U il rango di grandezza fisica: un vero e proprio "campo" di qualchecosa.
Cosa è questo qualchecosa?
Poiché dimensionalmente U è Energia riferita alla massa, potremmo semplicemente pensare di essere immersi in un mezzo denso, a cui corrisponde un parametro c**2 di energia riferita alla massa, e di cui U rappresenta anche l'eventuale fluire intorno a noi.
Consideriamo la più volte citata "coincidenza cosmologica" (Sciama ed altri):

(37) $$\frac{k\mathrm{M}_0}{Rc^2} = 1$$

dove compaiono massa e raggio dell'universo ovvero di tutto l'insieme delle stelle fisse.
Questa formula può essere letta a ritroso e ci direbbe che c**2 è originato dalle stelle fisse, e ogni altra presenza di masse vicine aggiunge un potenziale gravitazionale secondo la formula che conosciamo

(17) $$\Phi = -\frac{kM}{r}$$

Fintantoché siamo fermi o in moto uniforme in questo mezzo, esso non ci dà azioni sensibili; se invece acceleriamo bruscamente, ci "sbattiamo contro" ed avvertiamo una forza.

Conclusioni

Ho presentato un tentativo di interpretazione delle nostre leggi riguardo la gravità e l'inerzia.
La presenza fisica dei campi sembra essere un dato di fatto, ancor più concreto della usuale ammissione di "fictitious forces".
Mi viene in mente la frase di Hestenes a proposito della interpretazione della unità immaginaria "i".
Prendendo a prestito la frase e modificandola per le parti in parentesi verrebbe da dire:

"I want to emphasize that this interpretation (of forces) is by no means a radical speculation; it is a fact! The interpretation has been implicit in the (classical mechanics) all the time. All we have done is make it explicit".

Ho insistito nell'uso di notazioni vettoriali 3D anche se con l'algebra di Clifford, o la STA di Hestenes che sia, molte cose risultano (risulterebbero) più rigorose e più chiare.
Ho anche insistito perché la inerzia è un fatto di tutti i giorni e non può essere legata solo allo studio della cosmologia o a qualche teoria che si applica nelle "black holes".
Una parola sulla questione del "ritardo". Esso compare ragionando su un potenziale scalare c**2 prodotto dalle stelle fisse e su un potenziale vettore, responsabile dell'inerzia, prodotto dal moto delle stelle fisse. Con la formula dei potenziali ritardati l'effetto arriva diciamo dopo 14 miliardi di anni. Il ragionamento è questo: io accelero, considero invece una accelerazione relativa delle stelle fisse rispetto a me, arriva un potenziale vettore con la formula dei potenziali ritardati, sento l'inerzia……..14 miliardi di anni dopo; scatta un inestricabile paradosso sul ritardo. Si dice che Wheeler&Ciufolini in un libro recente abbiano risolto il paradosso con l'intervento contemporaneo di potenziali anticipati che provengono dal lontano futuro, ma la spiegazione mi sembra più complicata della domanda.
Io non ho capito perché la questione, che mi aveva bloccato per anni, mi sia ora sparita qui di sotto al naso.
Forse (??) la ragione sta nel fatto che la azione inerziale delle stelle fisse, a seguito di un mio moto, è semplicemente data dalla formula di trasformazione del potenziale scalare c**2 visto in un riferimento in moto.
Infatti la (16) implicitamente dice che un potenziale scalare c**2 (che ha avuto tutto il tempo per stabilirsi nel nostro spazio) esibisce qui, ora e subito, non appena calcolato in un riferimento S' mobile rispetto allo spazio inerziale, un annesso potenziale vettore: la formula dice infatti che il potenziale è riconducibile a una quadrivelocità (è un flusso di qualchecosa che è qui adesso) per cui vale per il quadripotenziale, così come avviene in elettromagnetismo [6], la stessa legge di trasformazione "istantanea" delle quadrivelocità. In questo modo non esiste nessun ritardo.

Bibliografia

[1] D. Hestenes, "Spacetime Physics with Geometric Algebra", Am. J. Phys. (2003)
[2] D. Hestenes, "Clifford Algebra and the interpretation of quantum mechanics", in "Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics", NATO ASI Series, Reidel (1986)
[3] T. De Mees, "A coherent dual vector field theory for gravitation", Internet release
[4].D. W. Sciama, "The Unity of the Universe", Faber and Faber, London, (1959); translated in "L'unità dell'Universo", Einaudi, (1965)
[5] A. Sommerfeld, "Lectures on theoretical Physics. Vol. I. Mechanics", Academic Press
[6] L.Landau, E. Lifchitz, "Théorie du champ", Edition de la paix, Moscou